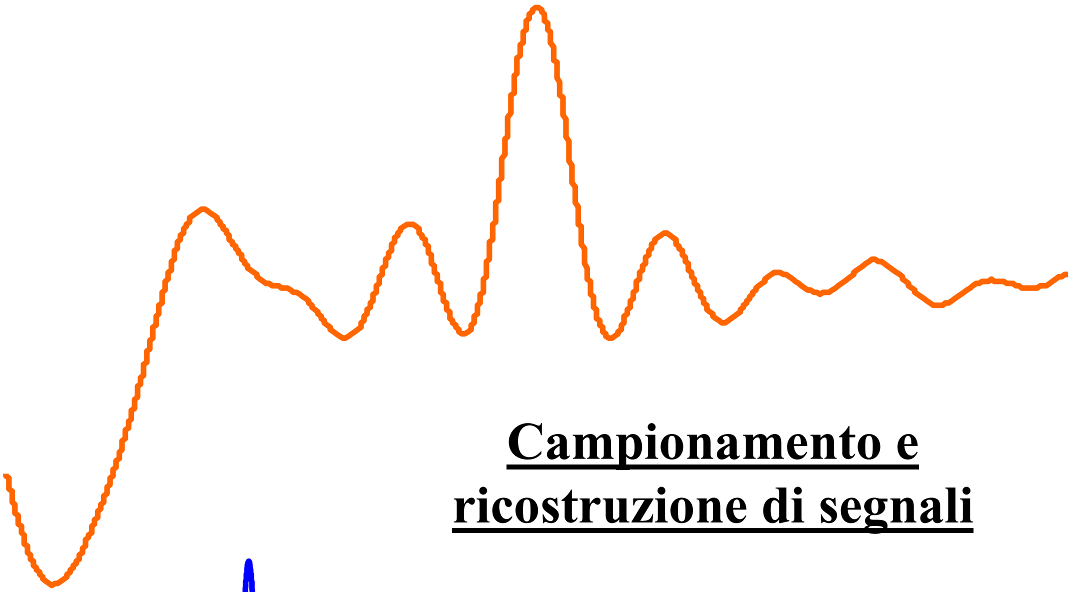
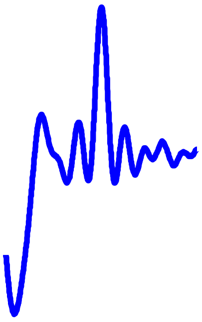
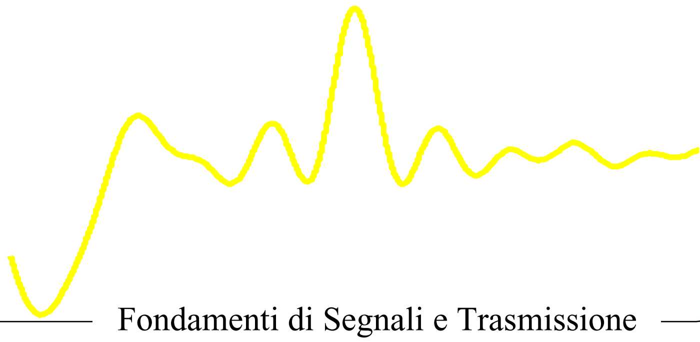


Campionamento e ricostruzione di segnali

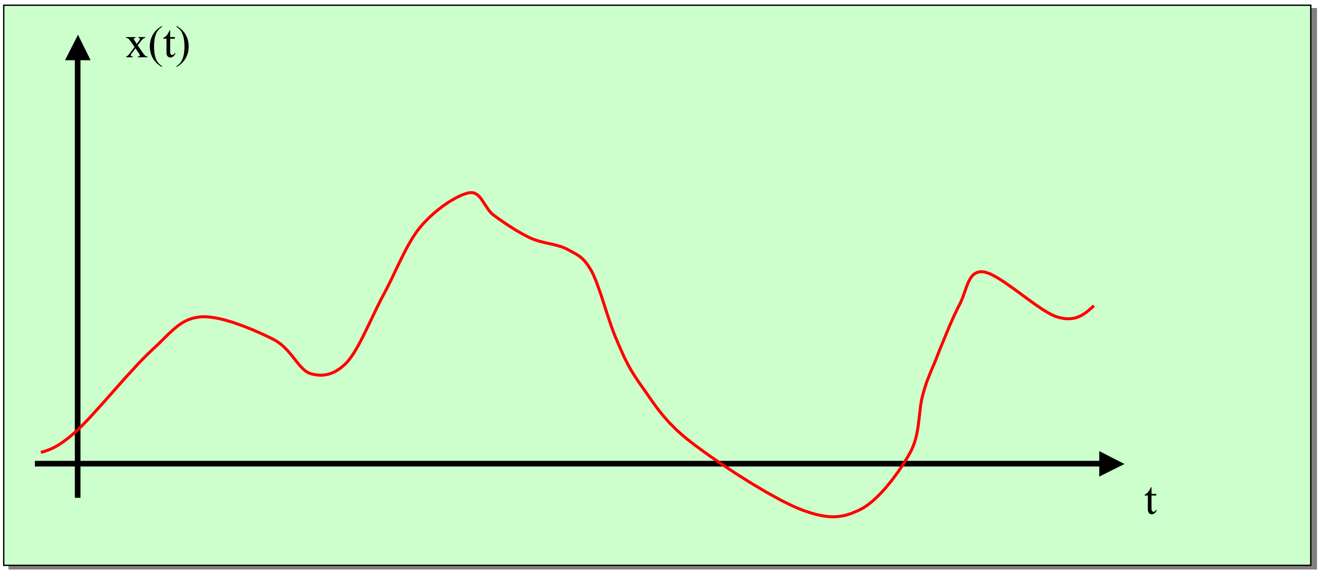




Numerizzazione dei segnali

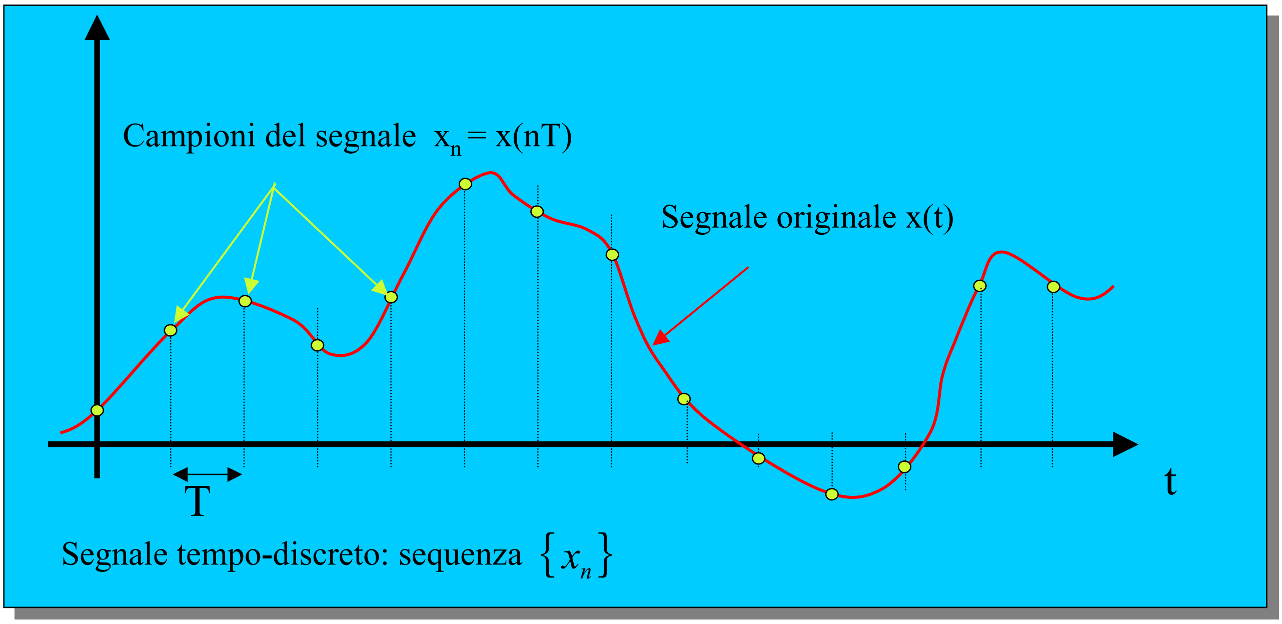
- Nei moderni sistemi di memorizzazione e trasmissione i segnali in ingresso sono di tipo **numerico,** normalmente rappresentati in **formato binario {0,1}**.
- In alcuni casi (si pensi ad esempio alle informazioni sulle operazione valutarie che le banche si scambiano fra loro), i segnali da elaborare e trasmettere sono segnali **numerici** gia' **all'origine** (la sorgente e' una sorgente numerica).
- In alcuni casi la rappresentazione numerica dei segnali originari e' molto semplice (alle lettere di un testo può essere facilmente associato un codice numerico: a→1, b →2, ecc.).
- In molti altri casi, invece, la rappresentazione numerica dei segnali originari richiede un'analisi più accurata. Come, ad esempio, rappresentare numericamente il segnale di tensione (Volt) in uscita da un microfono?

Molti dei segnali con cui abbiamo a che fare nella realtà quotidiana sono continui sia nel tempo che nelle ampiezze.



La rappresentazione di un segnale **continuo** in un segnale **numerico** richiede di discretizzare sia il tempo che le ampiezze.

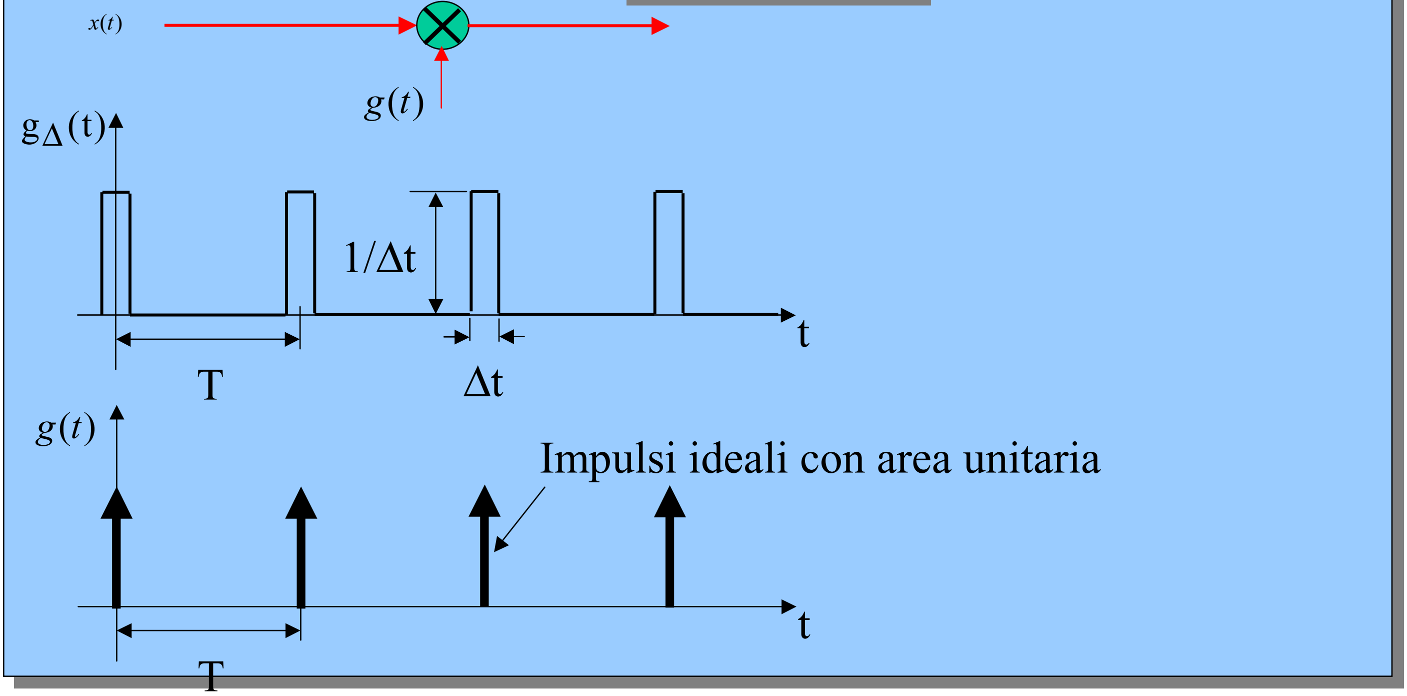
Campionare i segnali



- **T** e' detto **periodo (o passo) di campionamento;**
- **f_c=1/T** e' detta **frequenza di campionamento.**

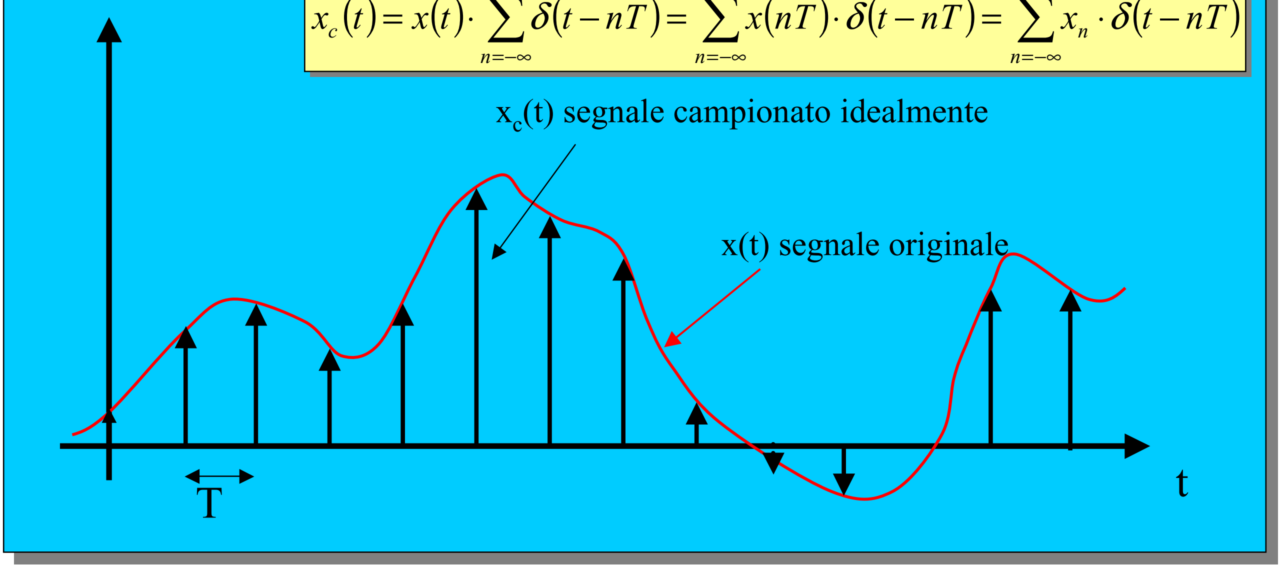
Il campionamento ideale nel tempo

$$x_c(t) = x(t) \cdot g(t)$$



Il campionamento ideale

$$x_c(t) = x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \cdot \delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \cdot \delta(t - nT)$$



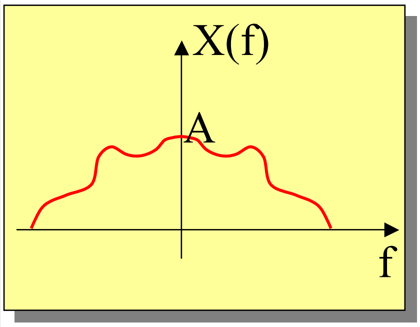
Il Campionamento ideale nel dominio delle frequenze

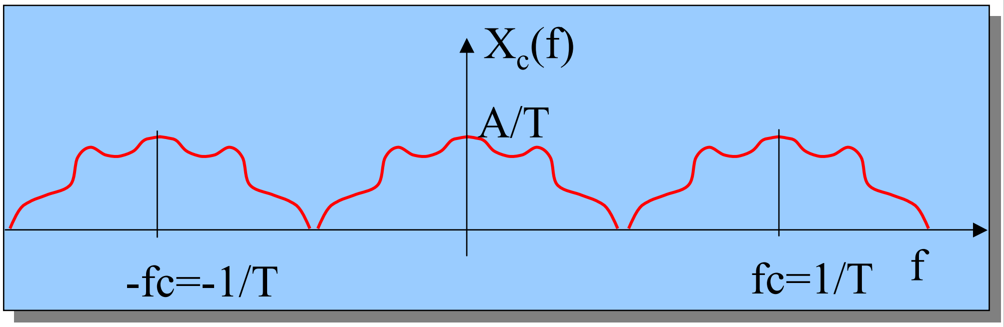
$$x(t) \xrightarrow{F} X(f)$$

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \xrightarrow{F} G(f) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T}\right) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - kf_c)$$

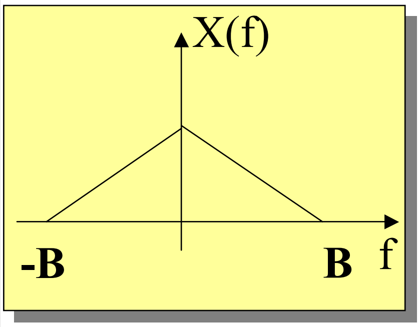
$$x_c(t) = x(t) \cdot g(t) \xrightarrow{F} X_c(f) = X(f) * G(f) =$$

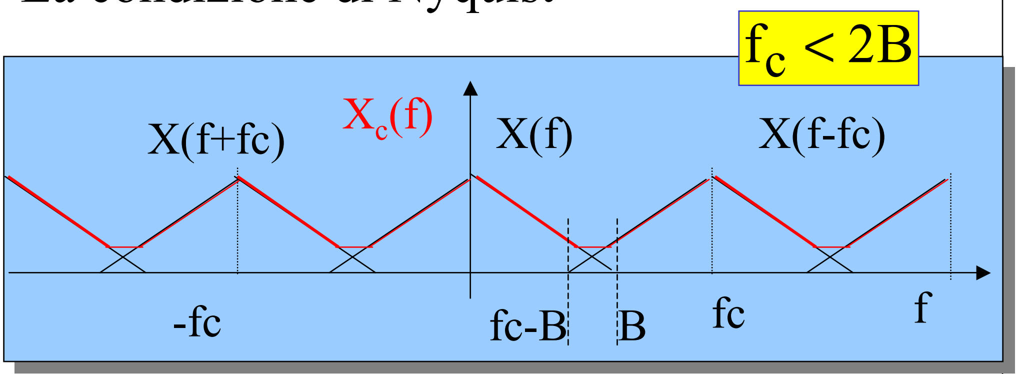
$$= X(f) * \frac{1}{T}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - kf_c)\right] = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(f - kf_c)$$

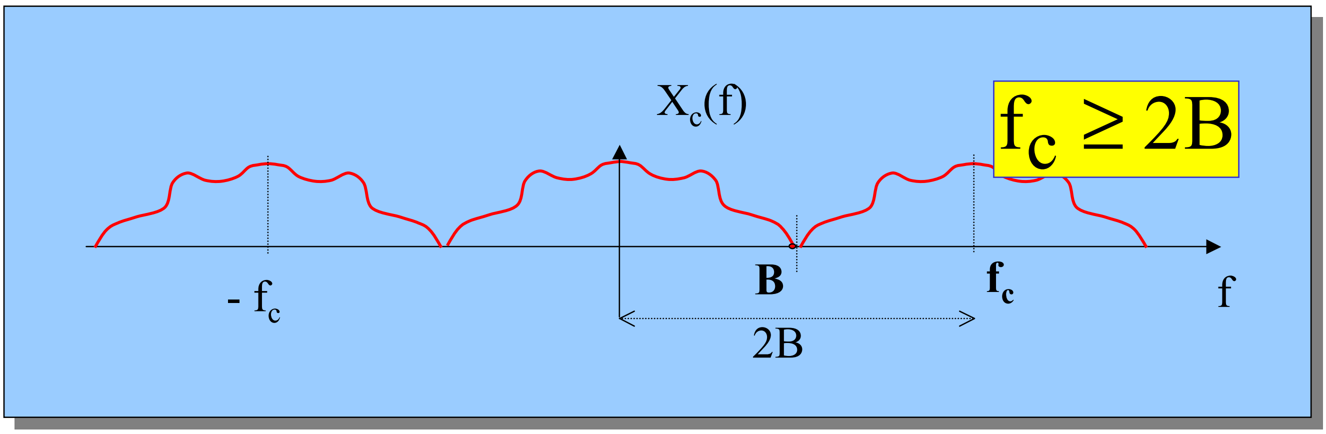




La condizione di Nyquist







Il teorema del campionamento

Se

- il segnale x(t) e' a banda B strettamente limitata

$$X(f)=0 \text{ per } |f|>=B;$$

- e' soddisfatta la condizione di Nyquist fc=1/T>=2B (o analogamente $B<fc/2=f_{Ny}$);

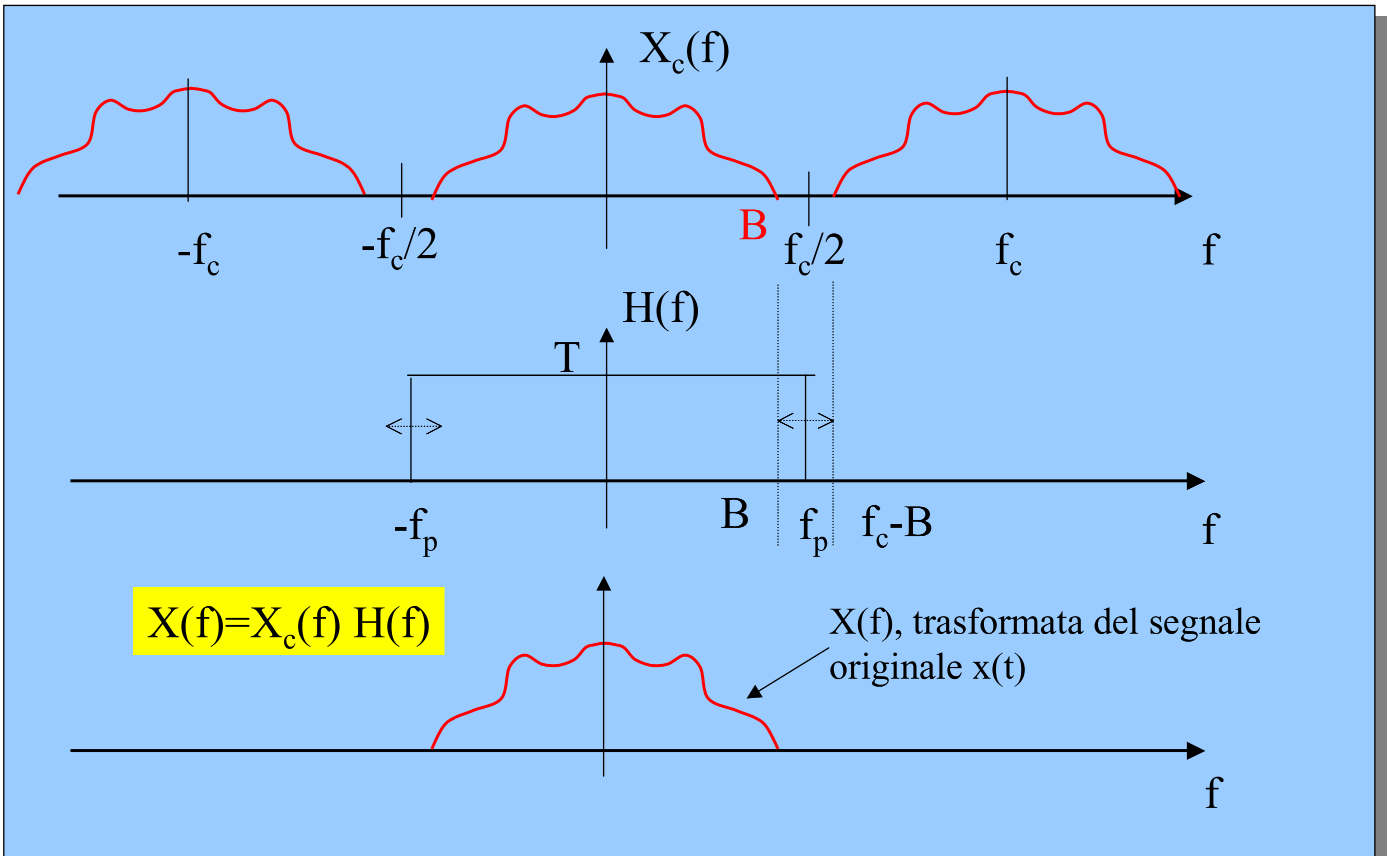
allora

- il segnale x(t) e' rappresentato dai suoi campioni;
- il segnale originale x(t) puo' essere ricostruito a partire dalla sua versione campionata $x_c(t)$ con un filtro passa basso ideale avente guadagno T e frequenza di taglio f_p

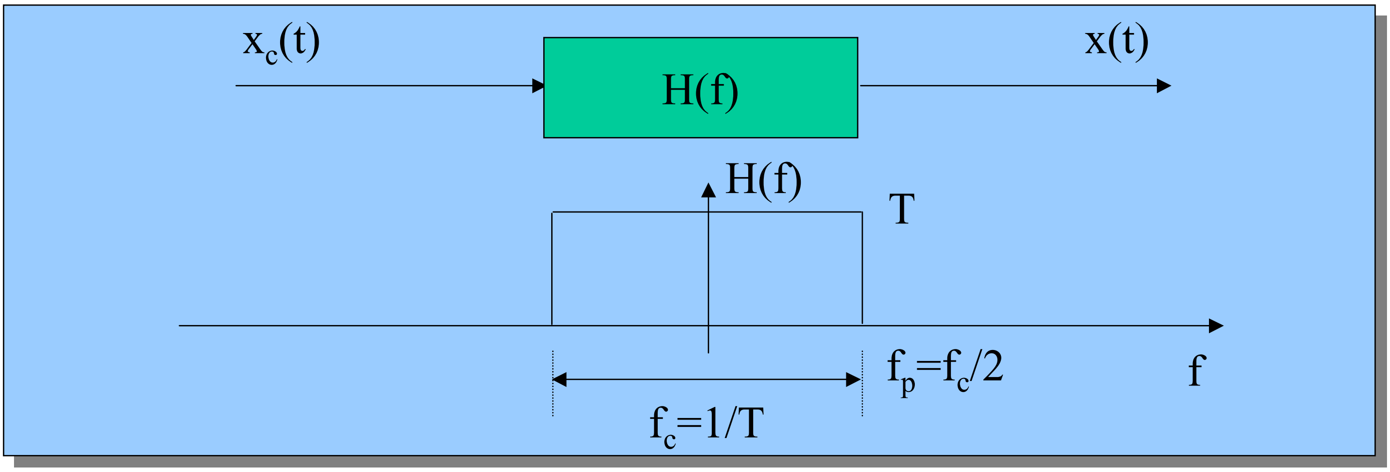
$$B < f_p < f_c - B.$$

(cioe' un filtro che elimina tutte le repliche spettrali tranne quella in banda base)

La ricostruzione del segnale (in frequenza)



La ricostruzione del segnale (nel tempo)



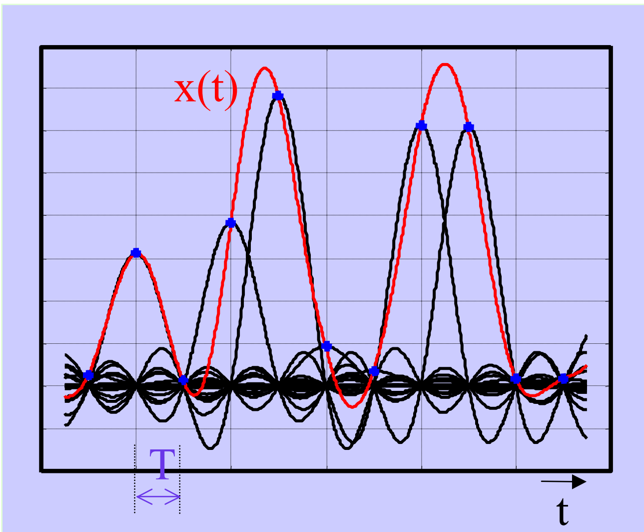
$$h(t) = F^{-1}(H(f)) = \mathrm{sinc}(t/T) = \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T}$$

$$x(t) = x_c(t) * h(t) = \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\cdot\delta(t-nT)\right] * \mathrm{sinc}(t/T) =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\cdot \mathrm{sinc}\left(\frac{t-nT}{T}\right)$$

Il segnale è ricostruito come somma di seni cardinali

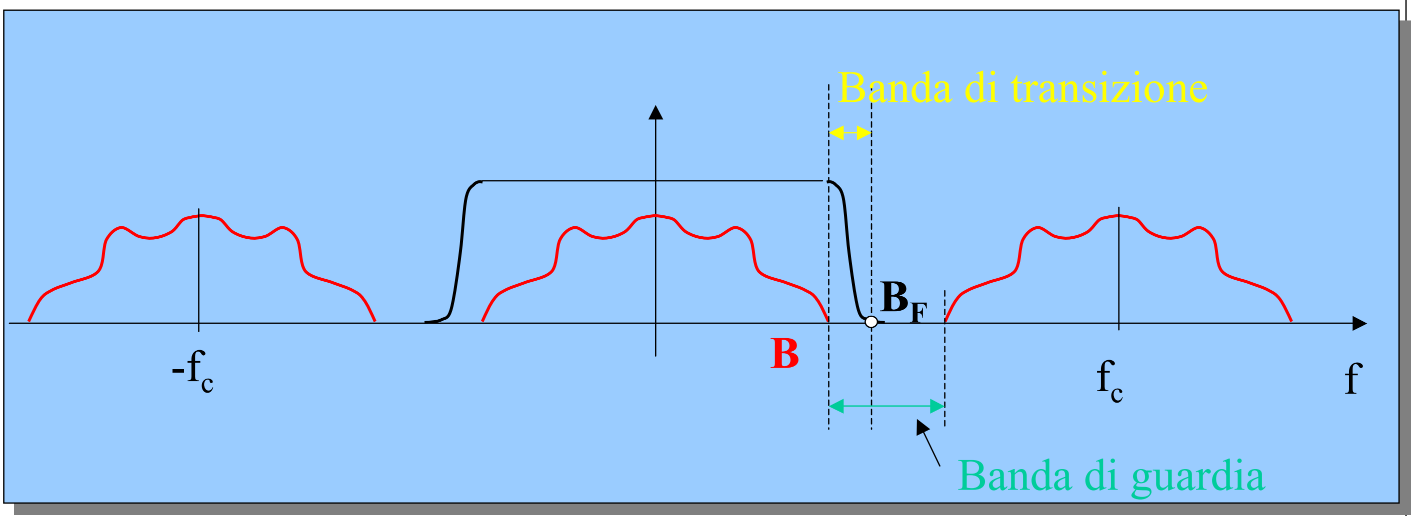
$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\cdot \mathrm{sinc}\left(\frac{t-nT}{T}\right)$$



Sistemi pratici di ricostruzione

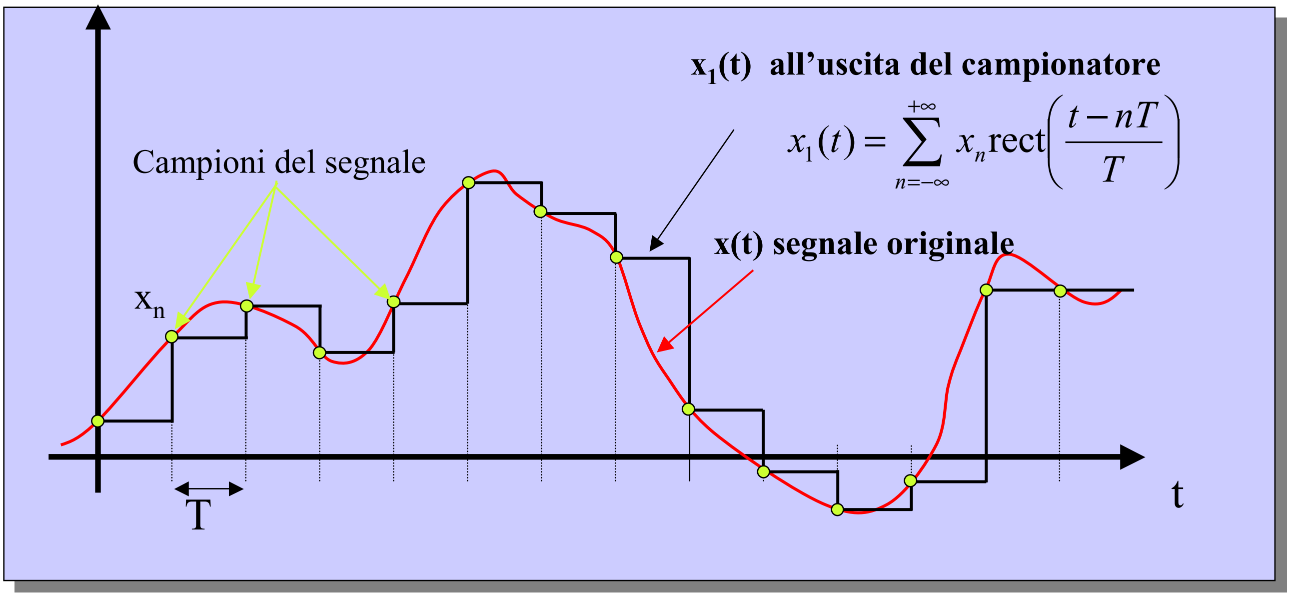
- Il segnale campionato consiste di impulsi di ampiezza e durata finita;
- il filtro di ricostruzione non e' ideale;
- il segnale da campionare non e' a banda rigorosamente limitata.

Filtri di ricostruzione non ideali



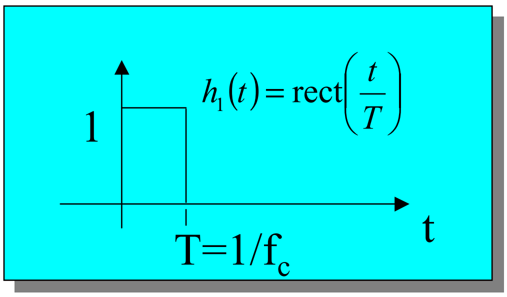
$$f_c \geq 2B_F > 2B$$

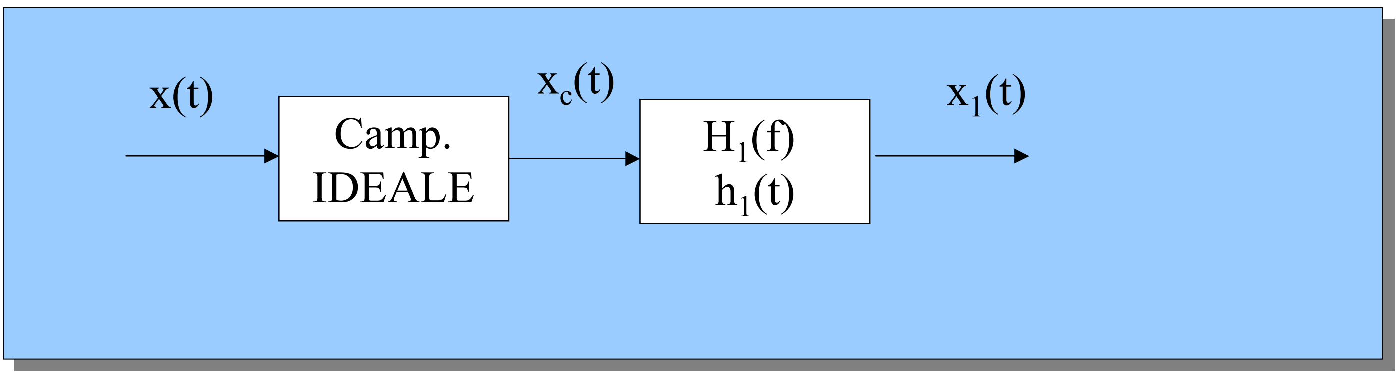
Sistemi pratici di ricostruzione



Il campionamento Sample & Hold (S&H)

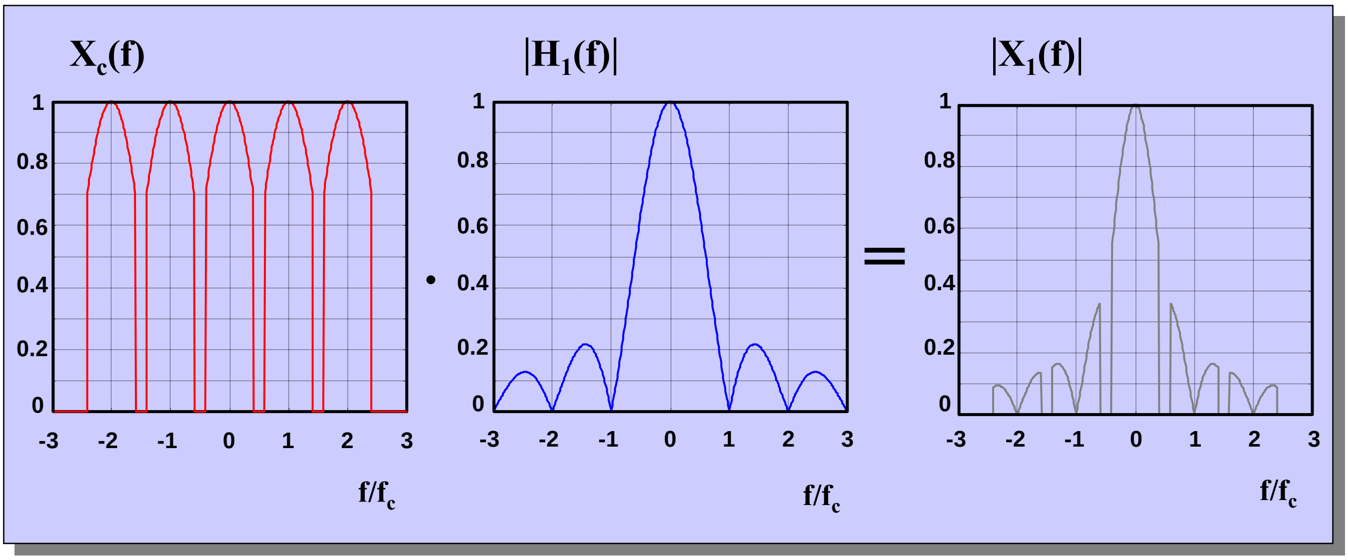
$$x_1(t) = x_c(t) * h_1(t)$$
$$X_1(f) = X_c(f) \cdot H_1(f)$$



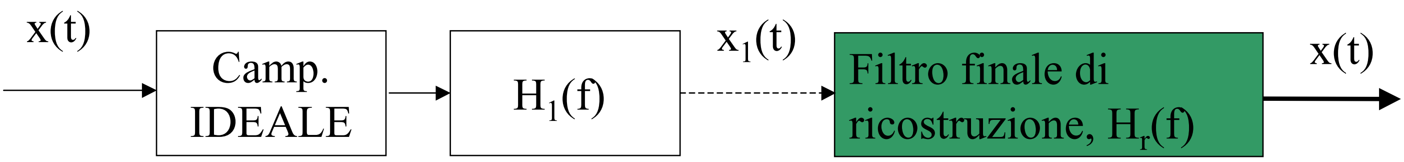


Il campionamento Sample & Hold (S&H)

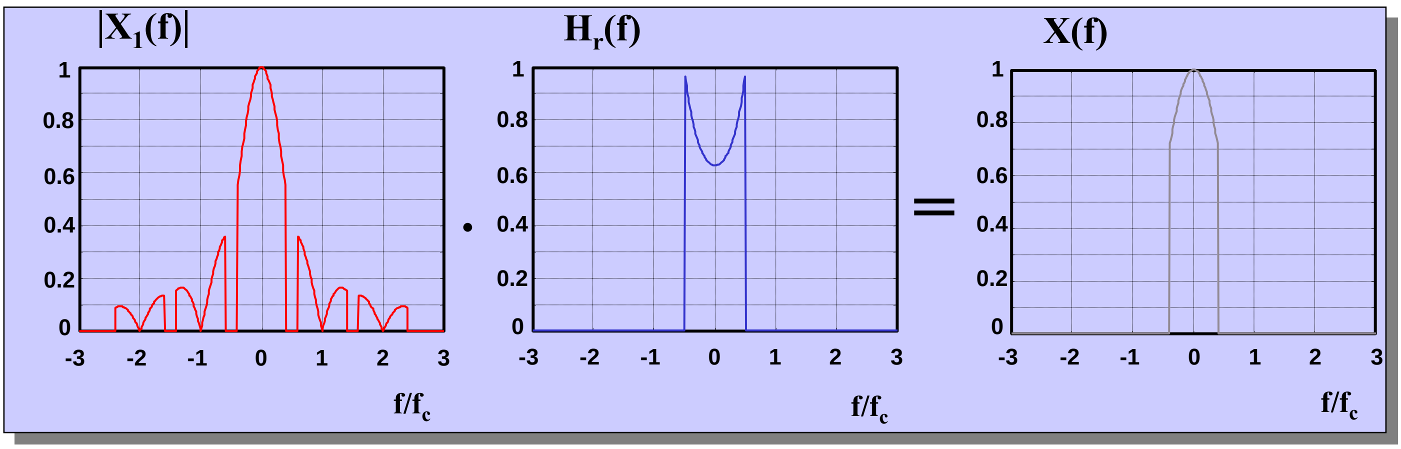
$$H_1(f) = \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f} \qquad X_1(f) = X_c(f) H_1(f)$$



La ricostruzione del segnale campionato con un S&H

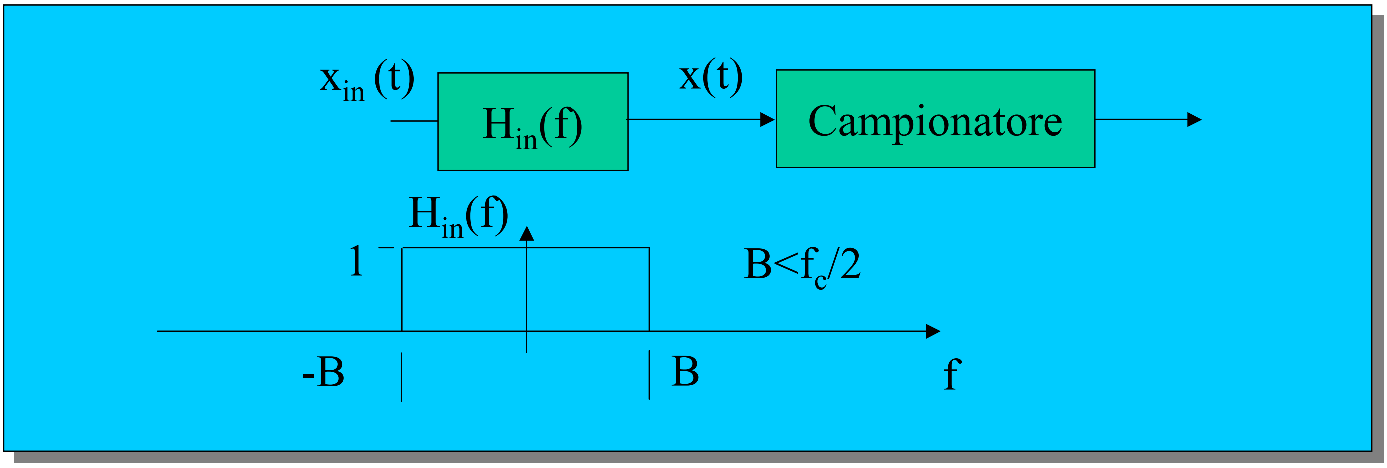


$$H_r(f) = \frac{1}{H_1(f)} H_{\text{ideale}}(f) = \frac{\pi f}{\sin(\pi f T)} \operatorname{rect}(f T)$$



Filtro anti-aliasing

Se i segnali sono a banda non rigorosamente limitata, per evitare la sovrapposizione di componenti spettrali con frequenza $f \geq f_c/2$ si inserisce, prima del campionatore un filtro limitatore di banda (filtro anti-aliasing).



Cosa succede se non è rispettato il Teorema del Campionamento?