



## RISPOSTA IN FREQUENZA DEI SISTEMI LINEARI TEMPO INVARIANTI

1

Fondamenti di Segnali e Trasmissione

### Risposta in frequenza e banda passante

La risposta in frequenza  $H(f)$  di un sistema LTI e' la trasformata di Fourier della risposta all'impulso  $h(t)$ :

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \exp\{-j2\pi f\tau\} d\tau$$

e ci dice come vengono modificate ampiezza e fase iniziale di un esponenziale complesso di frequenza  $f$  applicato all'ingresso del sistema:

La risposta in frequenza  $H(f)$  ci consente d'introdurre il concetto di **banda passante** di un sistema LTI (tipicamente un canale di trasmissione).

Il modulo della risposta in frequenza avra' valori piu' elevati in una banda di frequenze (detta **banda passante**) e relativamente piu' bassi alle altre frequenze.

All'uscita del sistema LTI, gli esponenziali complessi con frequenza compresa nella banda passante del sistema avranno ampiezza molto maggiore di quelli con frequenza esterna a tale banda. Per cui si dice che i primi passano attraverso il sistema, mentre i secondi no.

2

Fondamenti di Segnali e Trasmissione

## Legame fra TDF di ingresso e uscita

Ricordando la proprietà della TDF secondo la quale la TDF della convoluzione di due segnali è uguale al prodotto delle trasformate, si ottiene il seguente semplice legame tra:

- 1 -  $X(f)$ : TDF dell'ingresso  $x(t)$
- 2 -  $Y(f)$ : TDF dell'uscita  $y(t)$
- 3 -  $H(f)$ : TDF della risposta all'impulso  $h(t)$  del sistema LTI

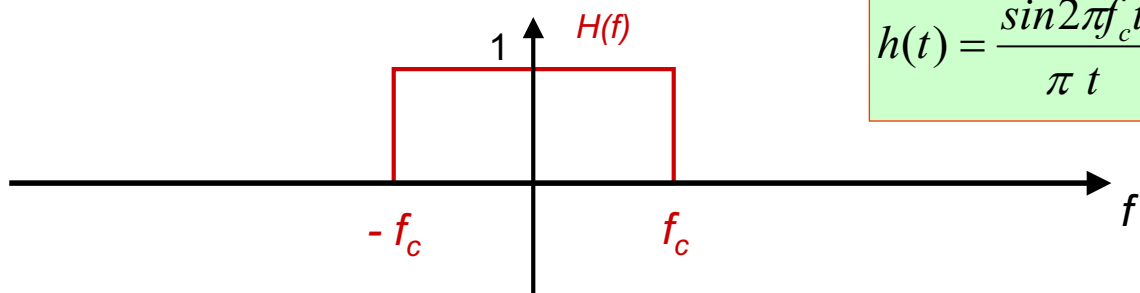
$$Y(f) = H(f)X(f)$$

**Attenzione:** non è sempre vero che la risposta in frequenza si può ottenere come rapporto tra le TDF dell'uscita e dell'ingresso. Infatti, in corrispondenza delle frequenze per cui  $X(f)=0$ , anche  $Y(f)=0$  qualsiasi sia il valore di  $H(f)$ .

## Risposta in frequenza del filtro reale passa-basso

Quando la risposta in frequenza  $H(f)$  ha ampiezza diversa da zero solo in una banda di frequenze simmetrica rispetto all'origine, il sistema LTI viene detto **filtro passa-basso**.

Un **filtro passa-basso ideale** con **frequenza di taglio  $f_c$**  ha come risposta in frequenza un rettangolo di ampiezza unitaria e base  $2f_c$ .

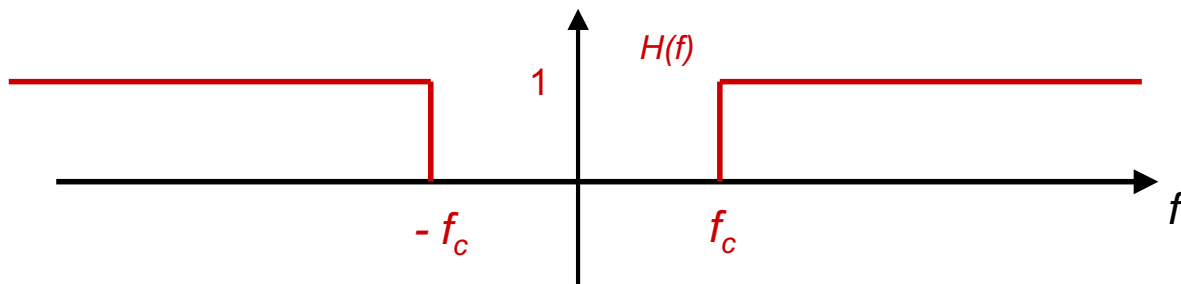


La risposta all'impulso è quindi un seno cardinale con gli zeri posizionati a tempi multipli interi di  $1/2f_c$

## Risposta in frequenza del filtro reale passa-alto

Quando la risposta in frequenza  $H(f)$  ha ampiezza diversa da zero solo a frequenze superiori a  $f_c$  (frequenza di taglio) e, simmetricamente, inferiori a  $-f_c$ , il sistema LTI viene detto **filtro passa-alto**.

Un **filtro passa-alto ideale** con **frequenza di taglio**  $f_c$  ha come risposta in frequenza una costante unitaria meno un rettangolo di ampiezza unitaria e base  $2f_c$ .

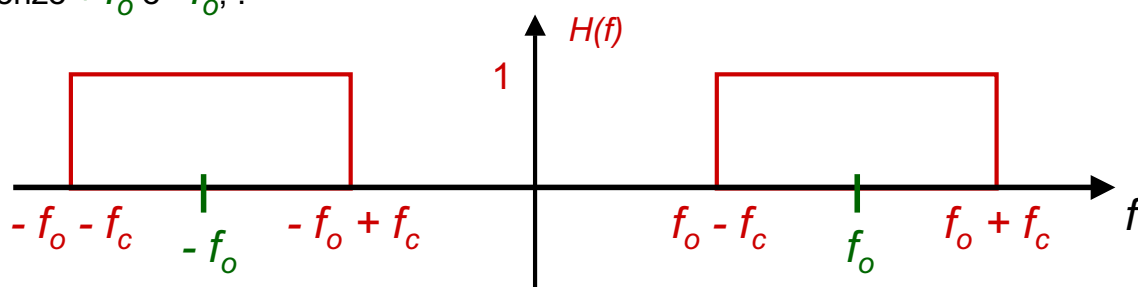


La risposta all'impulso è quindi data da un impulso di area unitaria  $\delta(t)$  meno un seno cardinale con gli zeri posizionati a tempi multipli interi di  $1/2f_c$ .

## Risposta in frequenza del filtro reale passa-banda

Quando la risposta in frequenza  $H(f)$  ha ampiezza diversa da zero solo in due bande di frequenza centrate intorno alla frequenza  $f_0$  (frequenza centrale) e, simmetricamente, intorno alla frequenza  $-f_0$ , il sistema LTI viene detto **filtro passa-banda**.

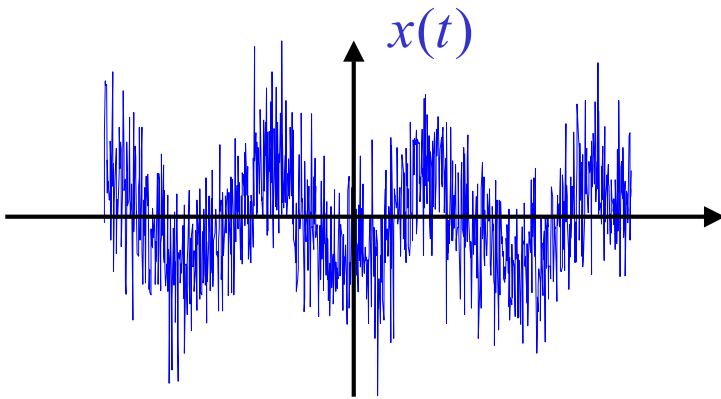
Un **filtro passa-banda ideale** con **frequenza centrale**  $f_0$  e **banda passante**  $2f_c$ , ha come risposta in frequenza due rettangoli di ampiezza unitaria e base  $2f_c$  centrati intorno alle frequenze  $+f_0$  e  $-f_0$ .



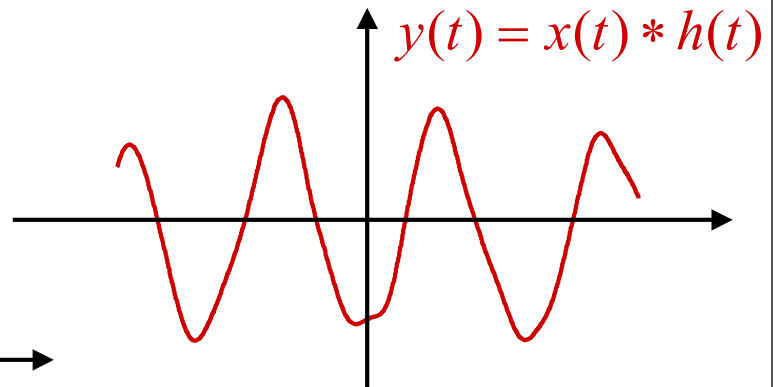
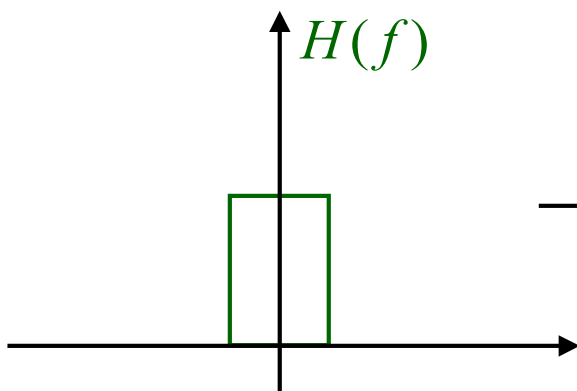
La risposta all'impulso è quindi data da un seno cardinale con gli zeri posizionati a tempi multipli interi di  $1/2f_c$  moltiplicato per  $2\cos 2\pi f_0 t$ .

## Filtro passa-basso

$$Y(f) = H(f) \cdot X(f)$$



Le componenti del segnale **rapidamente varianti nel tempo** (ad alta frequenza) vengono eliminate dalla risposta in frequenza del **filtro passa-basso**

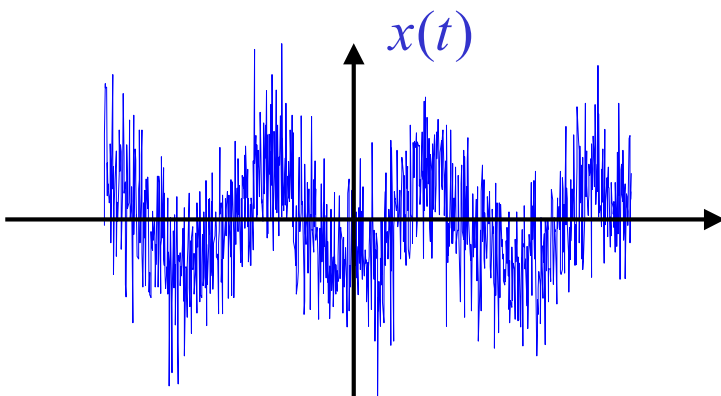


7

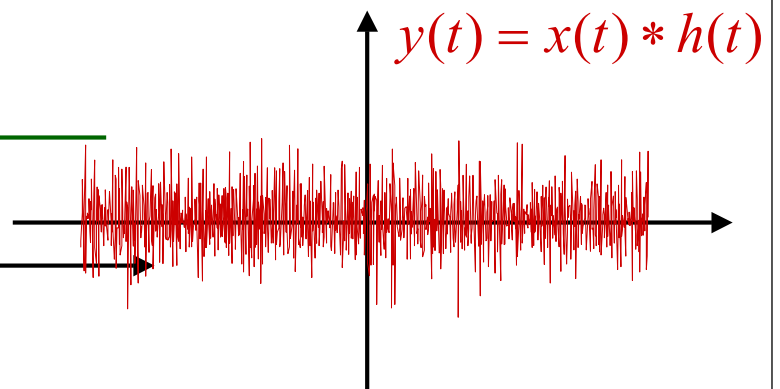
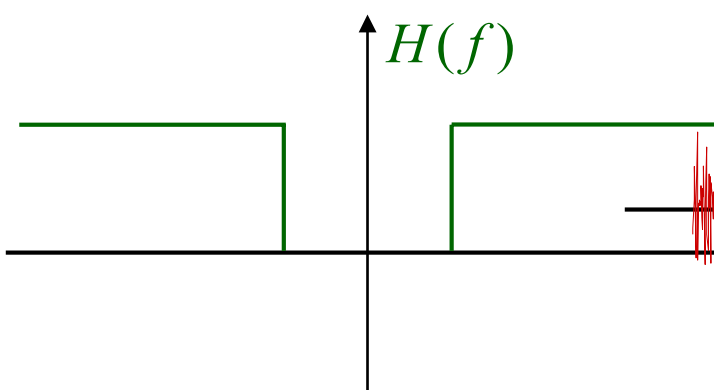
Fondamenti di Segnali e Trasmissione

## Filtro passa-alto

$$Y(f) = H(f) \cdot X(f)$$



Le componenti del segnale **lentamente varianti nel tempo** (a bassa frequenza) vengono eliminate dalla risposta in frequenza del **filtro passa-alto**

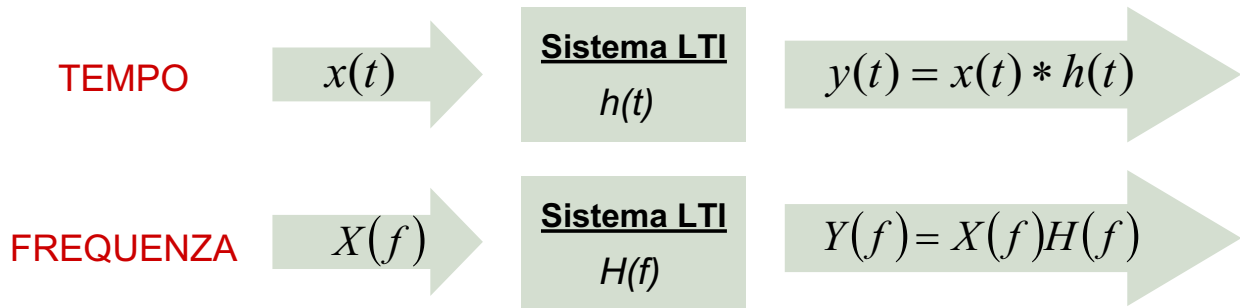


8

Fondamenti di Segnali e Trasmissione

## Densita' spettrale di energia attraverso sistemi LTI

Riassumendo quanto visto in precedenza, un sistema **L**ineare **T**empo-**I**nvariante e' descritto nei tempi dalla sua risposta all'impulso e nelle frequenze dalla sua risposta in frequenza. Il legame ingresso uscita e' il seguente:



Come viene modificata la densita' spettrale di energia di un segnale quando passa attraverso un sistema **L**ineare **T**empo-**I**nvariante?

