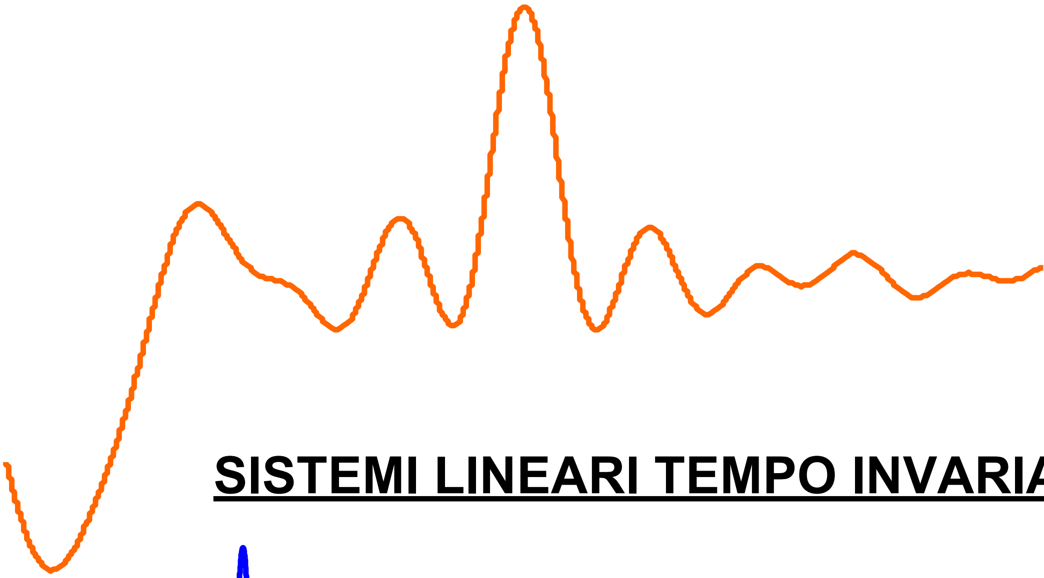
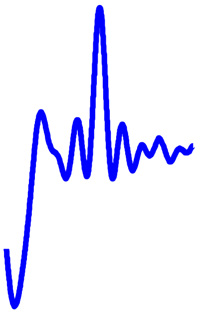
SISTEMI LINEARI TEMPO INVARIANTI





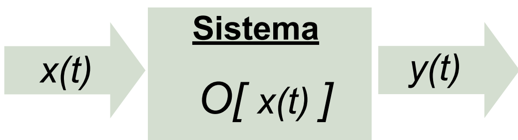
Definizione di Sistema

Sistema:

Da un punto di vista fisico e' un dispositivo che modifica un segnale *x(t),* detto **ingresso**, generando il segnale *y(t),* detto **uscita**.

Da un punto di vista formale il segnale d'ingresso *x(t)* viene "manipolato" tramite un generico operatore matematico indicato con *O[.]*. Il risultato delle operazioni matematiche eseguite sull'ingresso e' il segnale d'uscita *y(t).*

Schema a blocchi



Sistemi Lineari Tempo-Invarianti (LTI)

Lineare: quando l'uscita generata dalla combinazione lineare di due o piu' ingressi e' uguale alla combinazione lineare delle uscite generate dai singoli ingressi

$y_1(t)=O[x_1(t)]$
$y_2(t)=O[x_2(t)]$

$ax_1(t)+bx_2(t)$ → **Sistema Lineare** $O[ax_1(t)+bx_2(t)]=aO[x_1(t)]+bO[x_2(t)]$ → $ay_1(t)+by_2(t)$

Tempo Invariante: quando l'uscita generata da un segnale ritardato e' uguale all'uscita generata dal segnale originale ritardata (la risposta del sistema non dipende dall'istante t).

$y(t)=O[x(t)]$

$x(t-\tau)$ → **Sistema Tempo Invariante** $O[x(t-\tau)]$ → $y(t-\tau)$

Risposta all'impulso (1)

Risposta all'impulso: e' l'uscita del sistema quando l'ingresso e' l'impulso.
Viene solitamente indicata con il simbolo ***h(t)***

$$h(t)=O[\delta(t)]$$

$\delta(t)$ → **Sistema** $O[\delta(t)]$ → $h(t)$

L'uscita $y(t)=O[x(t)]$ di un sistema LTI si puo' calcolare a partire dalla risposta all'impulso $h(t)$ sfruttando le proprieta' che seguono:

1. Se il sistema e' tempo-invariante, la forma della risposta all'impulso non dipende dall'istante in cui si applica l'impulso. Quando l'ingresso e' un impulso anticipato o ritardato l'uscita e' uguale ad ***h(t)*** anticipata o ritardata:

$$O[\delta(t-\tau)]=h(t-\tau)$$

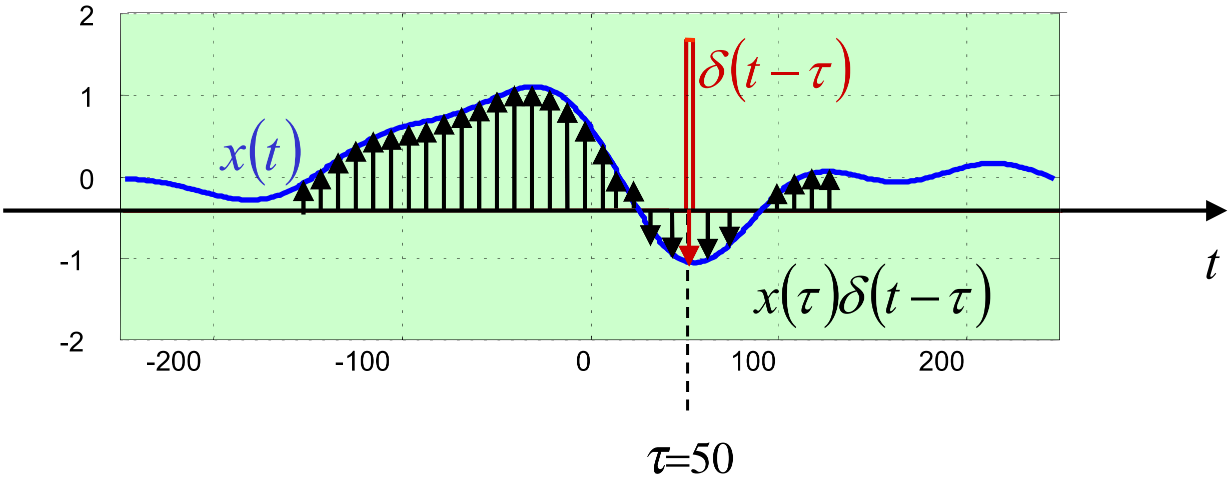
2. Se il sistema e' anche lineare, nota la risposta all'impulso, e' possibile calcolare l'uscita del sistema quando l'ingresso e' una qualsiasi combinazione lineare d'impulsi:

$$O[a\delta(t)+b\delta(t-\tau_1)+c\delta(t-\tau_2)]=ah(t)+bh(t-\tau_1)+ch(t-\tau_2)$$

Risposta all'impulso (2)

3. L'ingresso *x(t)* puo' essere rappresentato come somma integrale di impulsi ritardati e pesati (combinazione lineare di infiniti impulsi)

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\ \delta(t-\tau)\, d\tau$$



La convoluzione

Dalle proprieta' 1-2-3 segue:

x(t) come somma integrale di impulsi pesati e ritardati

Sistema L.: uscita corrispondente a una c.l. di ingressi e' la c.l. delle singole uscite

$$\boxed{y(t)} = O[x(t)] = O\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\ \delta(t-\tau)\, d\tau\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\ O[\delta(t-\tau)]\, d\tau =$$

$$\boxed{= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\ h(t-\tau)\, d\tau \ = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\ x(t-\tau)\, d\tau} = x(t) * h(t)$$

Sistema T.I.:
$O[\delta(t-\tau)]=h(t-\tau)$

Cambio variabili

Integrale di convoluzione (o semplicemente convoluzione)

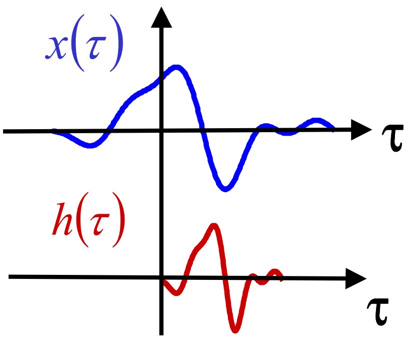
uscita = convoluzione tra ingresso e risposta all'impulso del sistema LTI

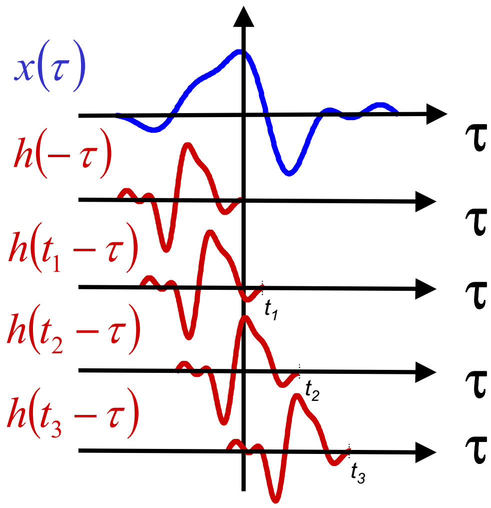
Calcolo dell'integrale di convoluzione

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\ h(t-\tau)\ d\tau$$

L' Integrando $\quad x(\tau)\ h(t-\tau)$

e' il prodotto tra il segnale $x(\tau)$ e la risposta all'impulso $h(\tau)$ ribaltata in τ traslata di t (verso destra se $t>0$, verso sinistra se $t<0$)

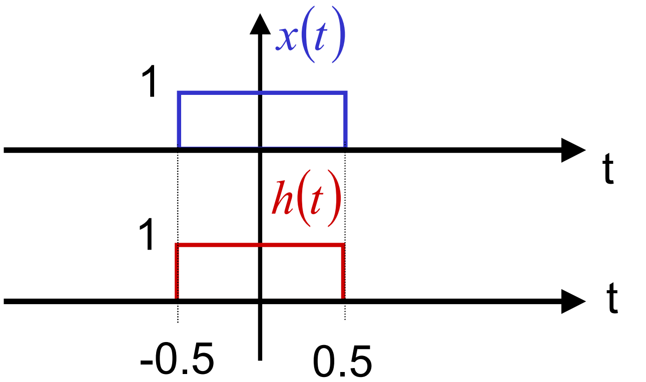




Esempi di calcolo della convoluzione (1)

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\ h(t-\tau)\ d\tau$$

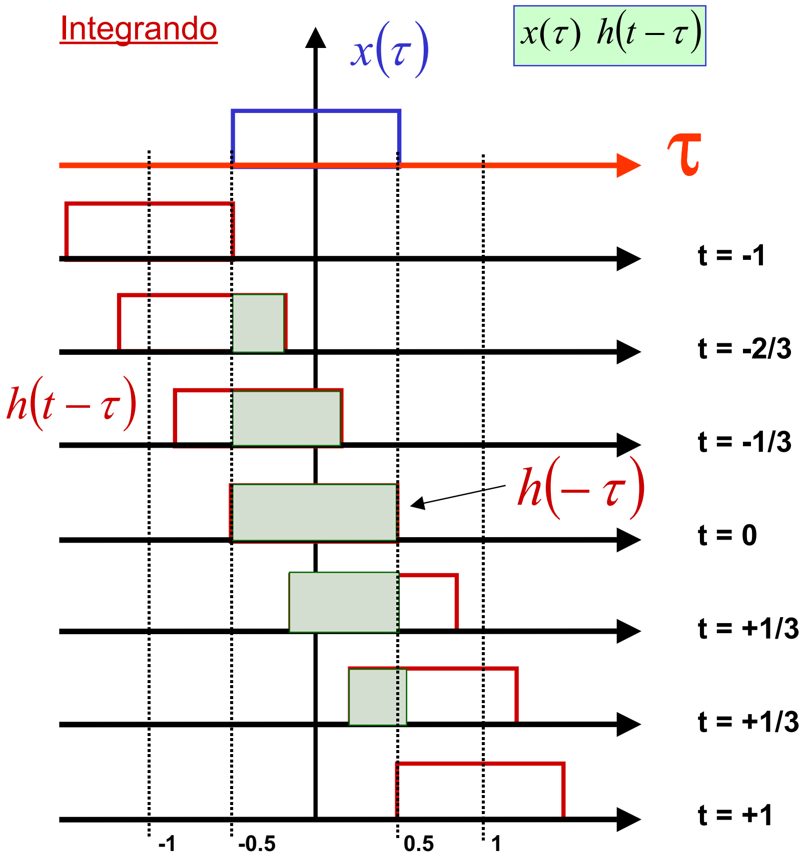
$$x(t)=h(t)=\mathrm{rect}(t)$$



Esempi di calcolo della convoluzione (2)

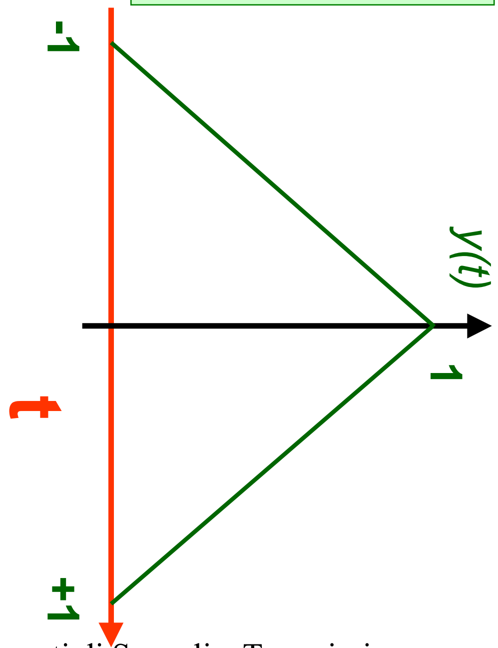
$$x(t) = h(t) = \mathrm{rect}(t)$$

Integrando



Integrale

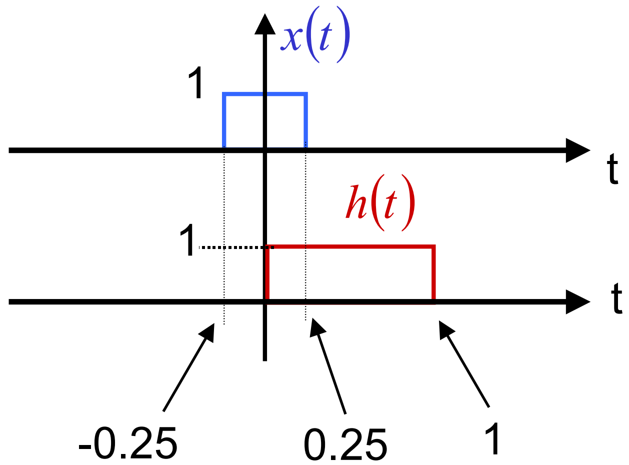
$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\ h(t-\tau)\, d\tau$$



Esempi di calcolo della convoluzione (3)

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\ h(t-\tau)\, d\tau$$

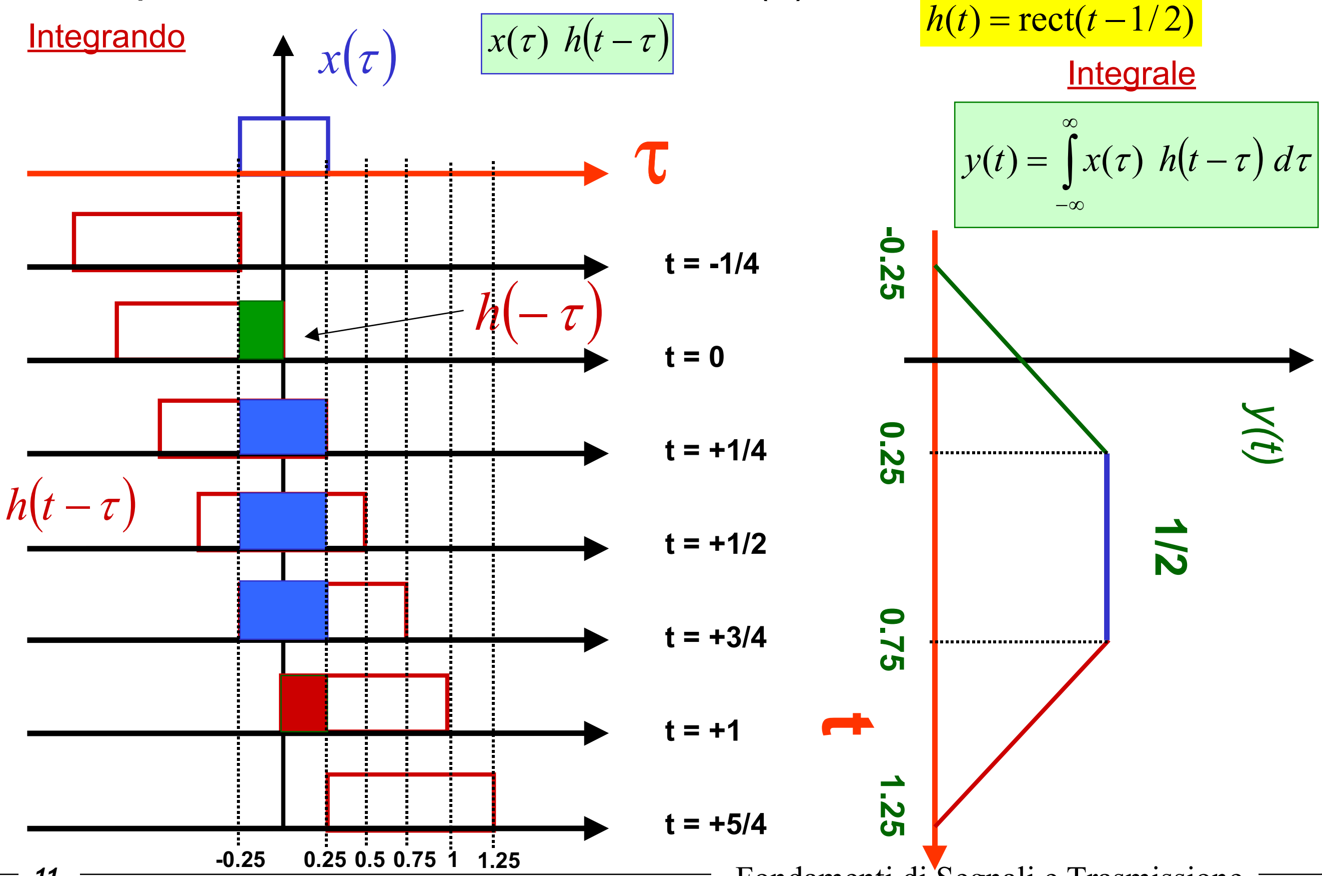
$$x(t) = \mathrm{rect}(2t)$$
$$h(t) = \mathrm{rect}(t - 1/2)$$



Esempi di calcolo della convoluzione (4)

$x(t) = \mathrm{rect}(2t)$

$h(t) = \mathrm{rect}(t - 1/2)$



Causalità dei Sistemi L.T.I. (1)

Definizione:

Un Sistema L.T.I. è detto causale se l'uscita y(t) per un t=$\bar{t}$, dipende dai valori dell'ingresso x(t) solo per valori della variabile t≤$\bar{t}$.
La condizione di causalità è molto importante se la variabile indipendente è il tempo: in questo caso un sistema fisico deve essere causale. Se ciò non fosse infatti il sistema sarebbe in grado di predire il futuro.

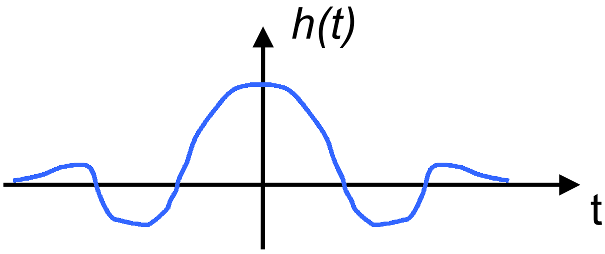
Condizione da rispettare per garantire la causalità: $h(t) = 0 \ \text{ per } t < 0$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

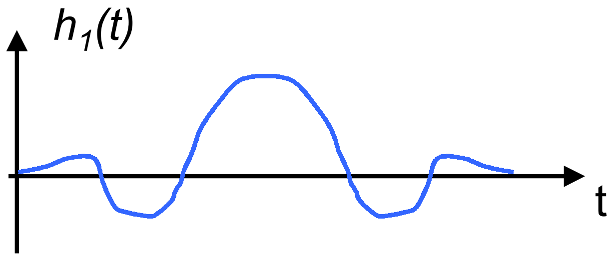
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau)h(\tau)d\tau = \int_{0}^{+\infty} x(t-\tau)h(\tau)d\tau$$

Causalità dei Sistemi L.T.I. (2)

Spesso utilizzeremo risposte all'impulso del tipo:

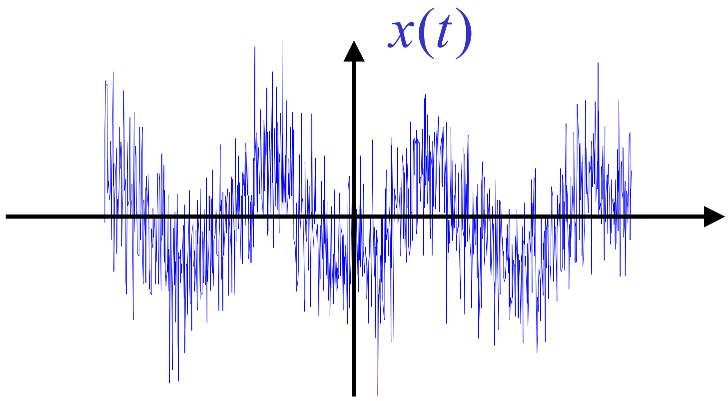


Questa risposta all'impulso non è causale, puo' essere resa causale attraverso: opportuni troncamenti (nel tempo, se *h(t)* si estende da -∞ a ∞) e ritardi.



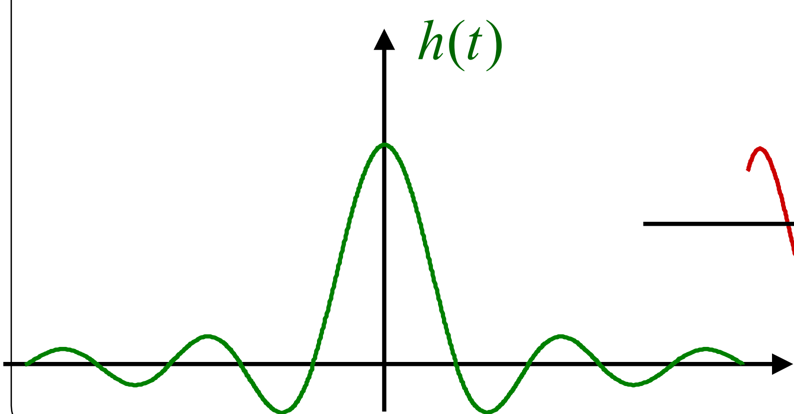
Utilizzare *h(t)* invece che $h_1(t)$ significa trascurare i ritardi necessari a rendere causale la risposta all'impulso.

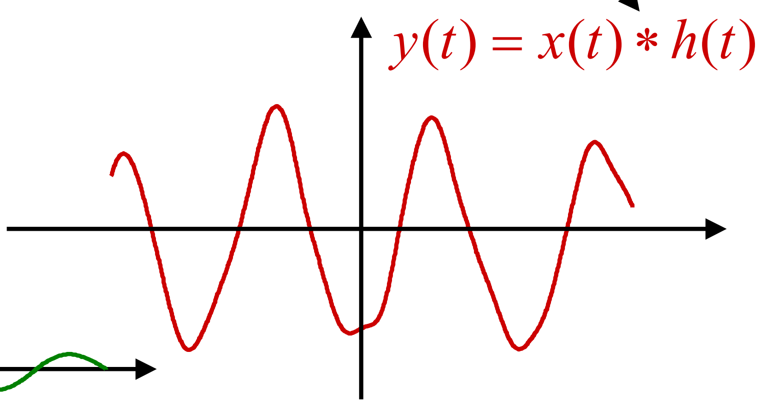
Effetti della convoluzione (filtro passa-basso)



Le componenti del segnale rapidamente varianti nel tempo (ad alta frequenza) vengono eliminate dalla convoluzione con una risposta all'impulso lentamente variante nel tempo (filtro passa-basso)

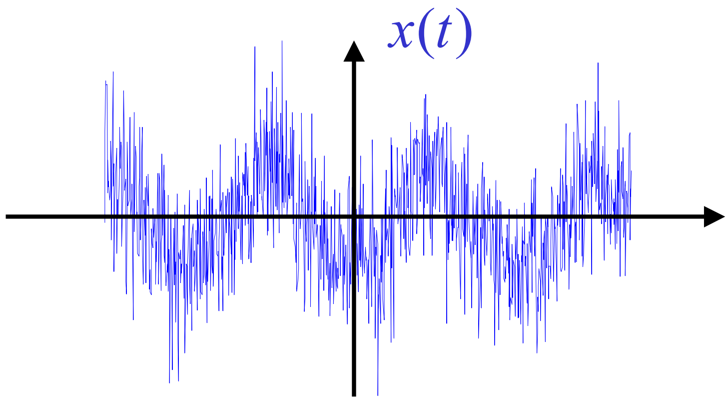
Simbolo della convoluzione

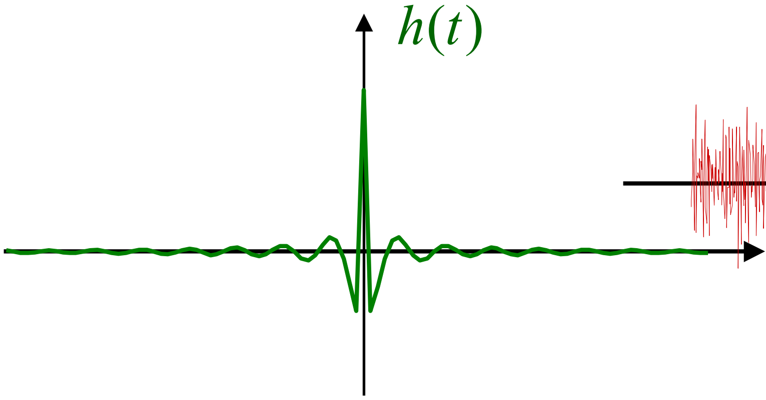




Effetti della convoluzione (filtro passa-alto)

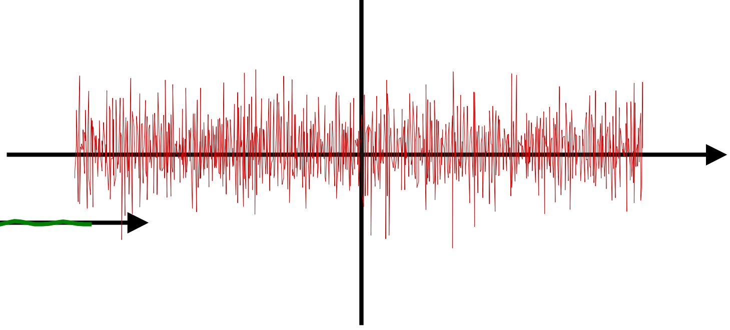
Le componenti del segnale lentamente varianti nel tempo (a bassa frequenza) vengono eliminate dalla convoluzione con una risposta all'impulso rapidamente variante nel tempo (filtro passa-alto)





Simbolo della convoluzione

$$y(t) = x(t) * h(t)$$



ESERCIZI PROPOSTI

1 - Dato il sistema LTI con risposta all'impulso $h(t)=\exp(-t/T_o)u(t)$, trovare l'uscita $y(t)$ quando l'ingresso $x(t)= \delta(t)+3\delta(t- T_o)-2\delta(t-2\, T_o)$. Quanto vale $y(T_o)$?

2 - Dato il sistema LTI con risposta all'impulso $h(t)= 3\delta(t- T_o)$, trovare l'uscita $y(t)$ quando l'ingresso $x(t)= 1+\cos(2\pi t/ T_o)$. Quanto vale $y(0)$?

3 - Dato il sistema LTI con risposta all'impulso $h(t)$ e ingresso $x(t)$ di figura, disegnare l'uscita $y(t)$. Quanto vale $y(1)$?