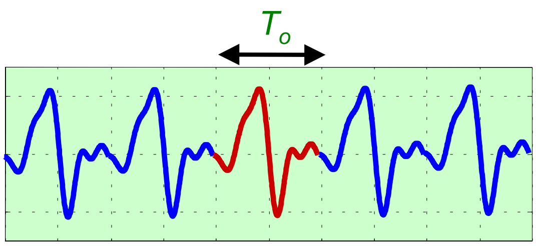
SEGNALI PERIODICI: LA SERIE DI FOURIER

Rappresentazione dei segnali periodici



Un segnale periodico con periodo T_o puo' essere rappresentato come *somma di esponenziali complessi* con **frequenza pari ad un multiplo intero della frequenza fondamentale (f_o=1/T_0)** e con opportuna ampiezza e sfasamento iniziale:

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k \exp\{j(2\pi k f_o t + \vartheta_k)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{A_k \exp\{j\vartheta_k\}}_{Y_k} \exp\{j2\pi k f_o t\}$$

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} Y_k \exp\{j2\pi k f_o t\}$$

Lo sviluppo del segnale periodico nelle sue componenti armoniche viene detto Serie di Fourier (i coefficienti complessi Y_k sono chiamati Coefficienti della Serie di Fourier).

Calcolo dei coefficienti

L'ampiezza A_k e lo sfasamento iniziale ϑ_k degli esponenziali complessi (detti *componenti armoniche*), cioe' i coefficienti complessi Y_k, si trovano con un semplice integrale:

$$Y_k = \frac{1}{T_o}\int_{T_0} y(t)\exp\{-j2\pi k f_o t\}dt = \frac{1}{T_o}\int_{-T_o/2}^{T_o/2} y(t)\exp\{-j2\pi k f_o t\}dt$$

$$Y_k = A_k \exp(j\vartheta_k) \qquad Y_k = a_k + jb_k$$

$$\begin{cases} a_k = A_k \cos\vartheta_k \\ b_k = A_k \sin\vartheta_k \end{cases} \qquad \begin{cases} A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \\ \vartheta_k = \arctan\dfrac{b_k}{a_k} \end{cases}$$

Dimostrazione

$$\mathrm{y(t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Y_n \exp\{j2\pi\ n\ f_o t\}$$

$$\mathrm{Y_k} = \frac{1}{T_o}\int_{-T_o/2}^{T_o/2} y(t)\exp\{-j2\pi k f_o t\}dt =$$

$$= \frac{1}{T_o}\int_{-T_o/2}^{T_o/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} Y_n \exp\{j2\pi n f_o t\}\cdot\exp\{-j2\pi k f_o t\}dt$$

$$= \frac{1}{T_o}\int_{-T_o/2}^{T_o/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} Y_n \exp\{j2\pi(n-k) f_o t\}dt$$

$$= \frac{1}{T_o}\sum_{n=-\infty}^{\infty} Y_n \left[\int_{-T_0/2}^{T_0/2}\cos(2\pi(n-k)f_o t)dt + j\int_{-T_0/2}^{T_0/2}\sin(2\pi(n-k)f_o t)dt\right] = \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq k \\ Y_n & \text{se } n = k \end{cases}$$

Se *n* e' diverso da *k* l'integrale e' nullo in quanto si integra un numero intero di cicli di un segnale sinusoidale (di periodo $T_0/|n\text{-}k|$).
Se *n=k* l'integrale e' diverso da zero in quanto si integra una costante.

Simmetrie della serie di Fourier di segnali reali

Se il segnale periodico *y(t)* e' reale la sua espansione in serie di Fourier gode di simmetria complessa coniugata:

$$Y_k = Y_{-k}^* \Rightarrow A_k \exp(j\vartheta_k) = A_{-k} \exp(-j\vartheta_{-k}) \Rightarrow \begin{cases} A_k = A_{-k} \\ \vartheta_k = -\vartheta_{-k} \end{cases}$$

$$a_k + jb_k = a_{-k} - jb_{-k} \Rightarrow \begin{cases} a_k = a_{-k} \\ b_k = -b_{-k} \end{cases}$$

INFATTI:

$$Y_{-k}^* = \left[\frac{1}{T_o} \int_{-T_o/2}^{T_o/2} y(t) \exp\{-j2\pi\ (-k)\ f_o t\}\, dt \right]^* =$$

$$= \frac{1}{T_o} \int_{-T_o/2}^{T_o/2} y(t) \left[\exp\{-j2\pi\ (-k)\ f_o t\}\right]^* dt =$$

$$= \frac{1}{T_o} \int_{-T_o/2}^{T_o/2} y(t) \exp\{+j2\pi\ (-k)\ f_o t\}\, dt = \frac{1}{T_o} \int_{-T_o/2}^{T_o/2} y(t) \exp\{-j2\pi k f_o t\}\, dt = Y_k$$

Serie di Fourier di segnali reali

Se il segnale periodico *y(t)* e' reale la serie di Fourier puo' scriversi anche come somma di coseni e seni:

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} Y_k \exp\{j2\pi k f_o t\} = Y_o + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\underbrace{\{Y_k \exp\{j2\pi k f_o t\}\}}_{z} + Y_{-k} \exp\{-j2\pi k f_o t\} \right]$$

$$= Y_o + \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{Y_k \exp\{j2\pi k f_o t\} + Y_k^* \exp\{-j2\pi k f_o t\}}_{z+z^* = \mathrm{Re}\{z\}+j\,\mathrm{Im}\{z\}+\mathrm{Re}\{z\}-j\,\mathrm{Im}\{z\}=2\mathrm{Re}\{z\}} = Y_o + \sum_{k=1}^{\infty} 2\,\mathrm{Re}\{Y_k \exp\{j2\pi k f_o t\}\}$$

$$Y_k = A_k \exp\{j\vartheta_k\}$$

$$\mathrm{Re}\{z\} = A_k \mathrm{Re}\{\exp\{j2\pi k f_o t + \vartheta_k\}\}$$

$$y(t) = Y_o + 2\sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(2\pi k f_o t + \vartheta_k)$$

$$Y_k = a_k + jb_k$$

$$\mathrm{Re}\{z\} = \mathrm{Re}\{(a_k + ib_k)(\cos(2\pi k f_o t) + j\sin(2\pi k f_o t))\}$$

$$y(t) = Y_o + 2\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(2\pi k f_o t) - b_k \sin(2\pi k f_o t)$$

L'unica *armonica* che non e' moltiplicata per 2 e' quella a frequenza zero che viene detta la componente continua del segnale (valore medio del segnale).

$$Y_0 = \frac{1}{T_0} \int_{-T_o/2}^{T_o/2} y(t)\, dt$$

Serie di Fourier di segnali reali pari

Se il segnale periodico *y(t)* e' reale e pari:

$$Y_k = \frac{1}{T_o}\int_{-T_0/2}^{+T_0/2} y(t)\exp\{-j2\pi k f_o t\}dt = \frac{1}{T_o}\int_{-T_0/2}^{+T_0/2} y(t)\cos(2\pi k f_o t)dt - \cancel{\frac{j}{T_0}\int_{-T_0/2}^{+T_0/2} y(t)\sin(2\pi k f_o t)dt}$$

$$Y_k = \frac{2}{T_o}\int_{0}^{+T_0/2} y(t)\cos(2\pi k f_o t)dt$$

I coefficienti della serie di Fourier sono reali: $Y_k = a_k$. Inoltre, dovendo valere la simmetria $Y_k = Y_{-k}^*$, i coefficienti della serie di Fourier sono pari: $Y_k = Y_{-k}$.

La serie di Fourier e' una somma di soli coseni:

$$y(t) = Y_o + 2\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(2\pi k f_o t)$$

Serie di Fourier di segnali reali dispari

Se il segnale periodico *y(t)* e' reale e dispari:

$$Y_k = \frac{1}{T_o}\int_{-T_0/2}^{+T_0/2} y(t)\exp\{-j2\pi k f_o t\}dt = \cancel{\frac{1}{T_o}\int_{-T_0/2}^{+T_0/2} y(t)\cos(2\pi k f_o t)dt} - \frac{j}{T_0}\int_{-T_0/2}^{+T_0/2} y(t)\sin(2\pi k f_o t)dt$$

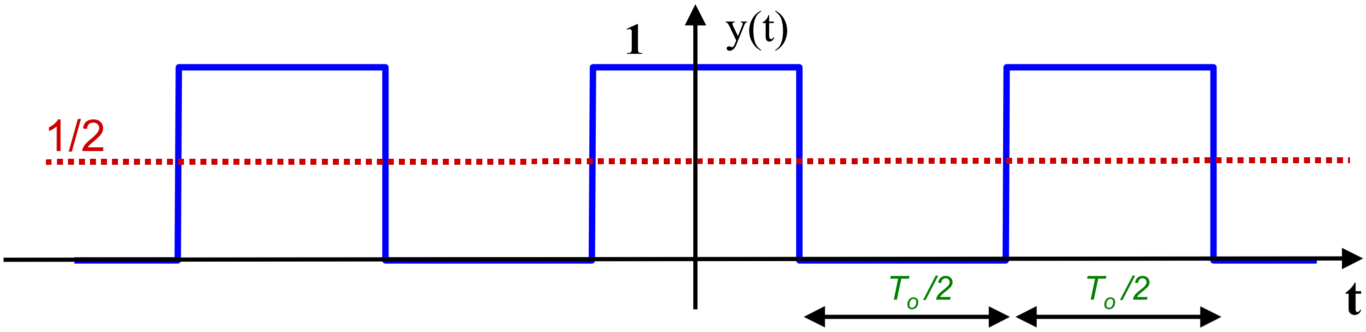
$$Y_k = -\frac{2j}{T_o}\int_{0}^{+T_0/2} y(t)\sin(2\pi k f_o t)dt$$

I coefficienti della serie di Fourier sono immaginari: $Y_k = jb_k$. Inoltre, dovendo valere la simmetria $Y_k = Y_{-k}^*$, i coefficienti sono dispari: $Y_k = -Y_{-k}$.

La serie di Fourier e' una somma di soli seni:

$$y(t) = 2\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(2\pi k f_o t)$$

Esempi di espansione in serie di Fourier: l'onda quadra

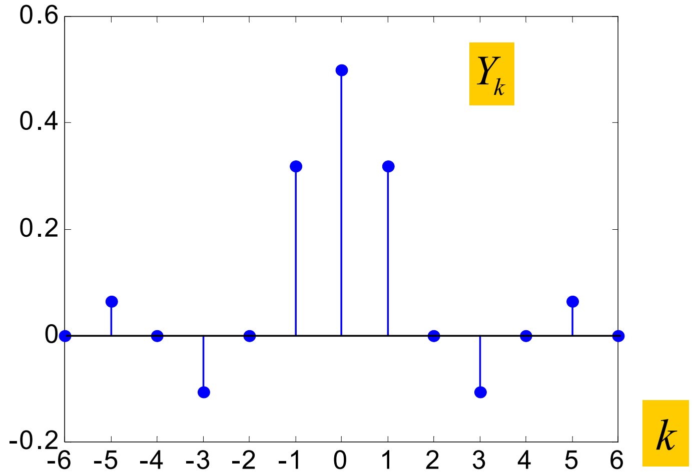


La componente continua, Y_0, vale 1/2

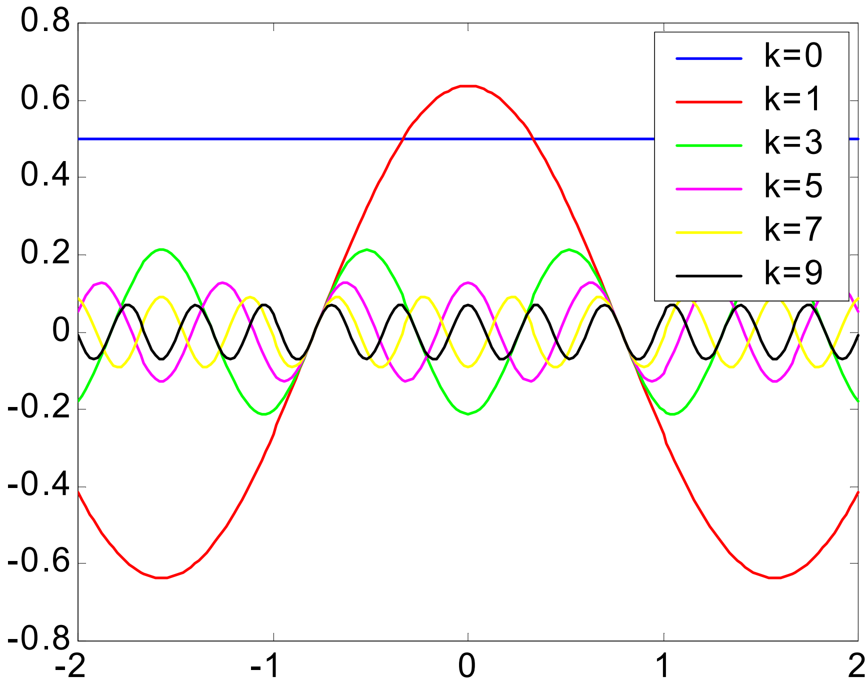
$$Y_k = \frac{1}{T_o}\int_{-T_o/4}^{T_o/4} \exp\{-j2\pi\ k\ f_o t\}\,dt =$$

$$\frac{1}{T_o}\int_{-T_o/4}^{T_o/4} \cos\{2\pi\ k\ f_o t\}\,dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin \pi\ k/2}{\pi\ k/2}$$

$$\left.\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right|_{\alpha=0} = \lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1$$



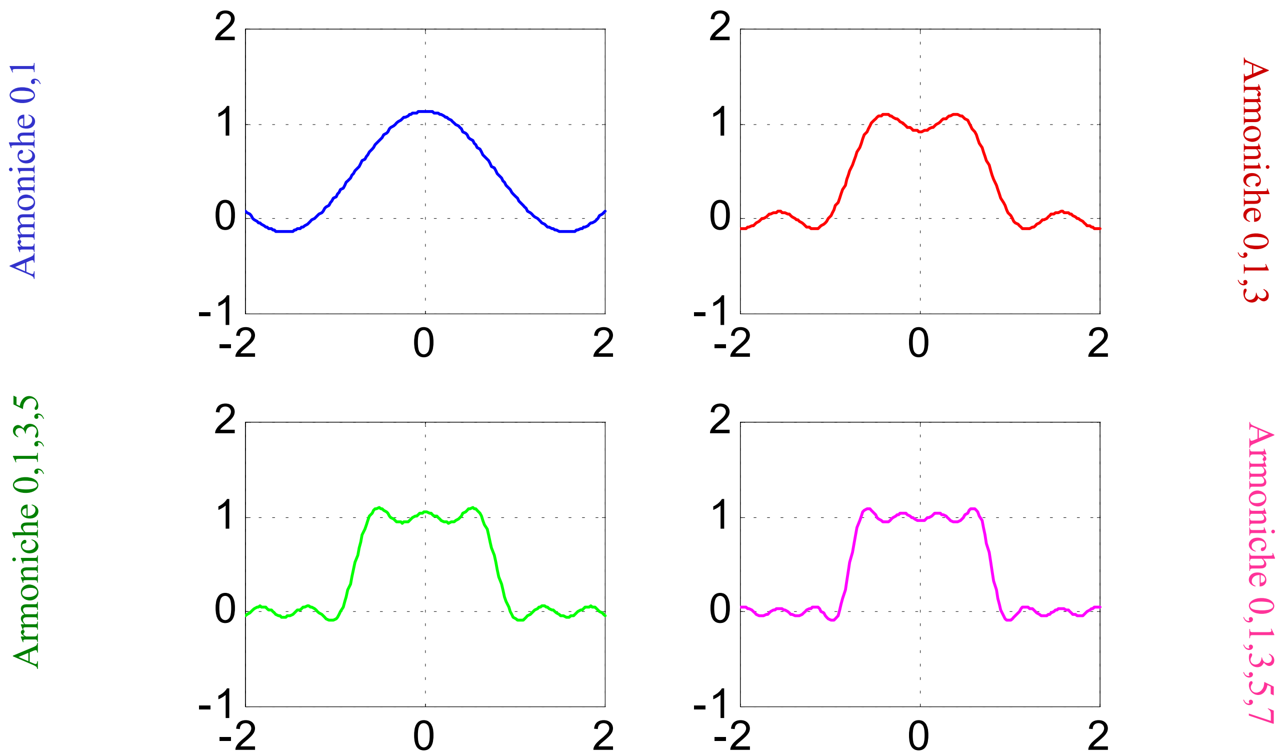
Le prime 10 armoniche dell'onda quadra



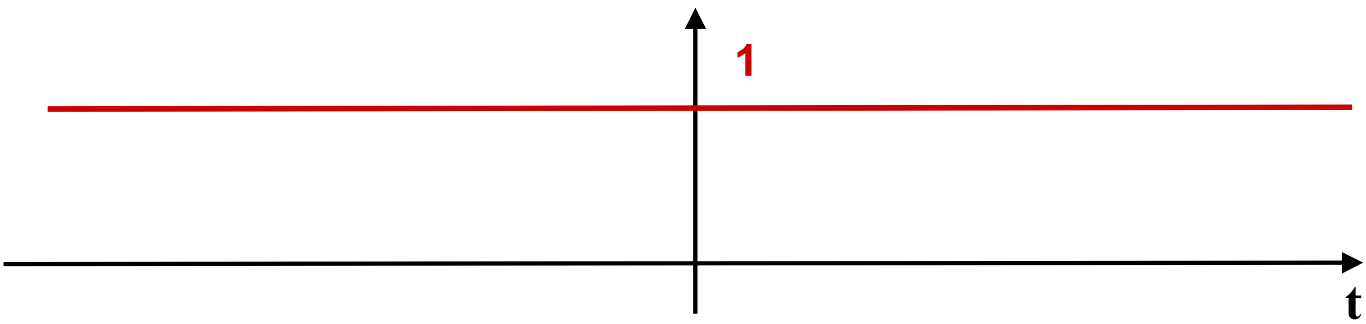
Essendo il segnale y(t) reale e pari i coefficienti della serie di Fourier sono reali e pari. Lo sviluppo di Fourier contiene solo armoniche coseni.

$$y(t) = Y_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{Re}(Y_k)\cdot\cos(2\pi k f_0 t) \cancel{- 2\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{Im}(Y_k)\cdot\sin(2\pi k f_0 t)} = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\left(\frac{\pi k}{2}\right)}{\frac{\pi k}{2}}\cdot\cos(2\pi k f_0 t)$$

Espansione parziale in serie di Fourier dell'onda quadra



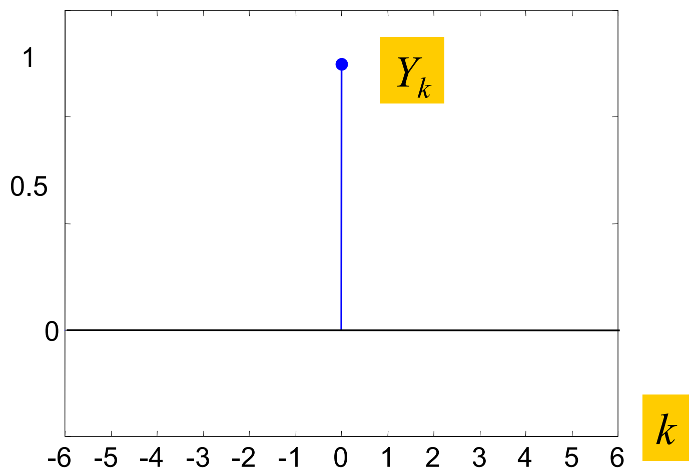
Esempi di espansione in serie di Fourier: la costante



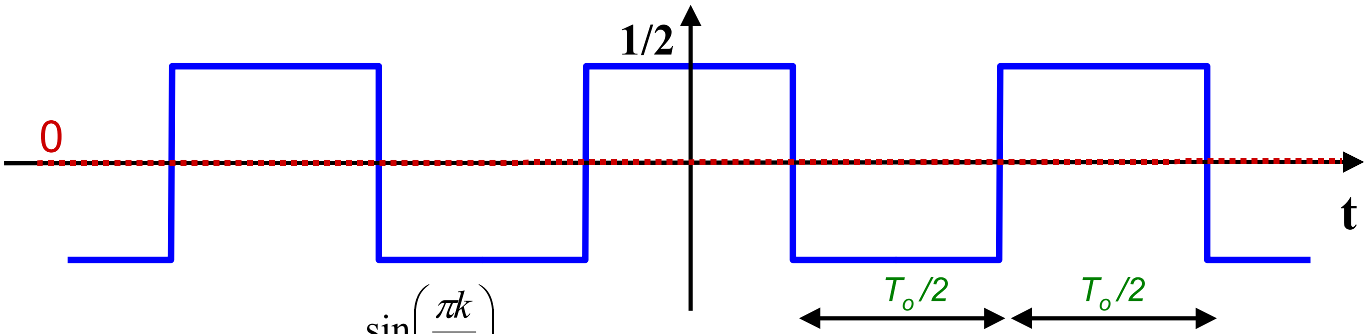
E' periodica di un periodo di durata qualsiasi

La componente continua vale 1

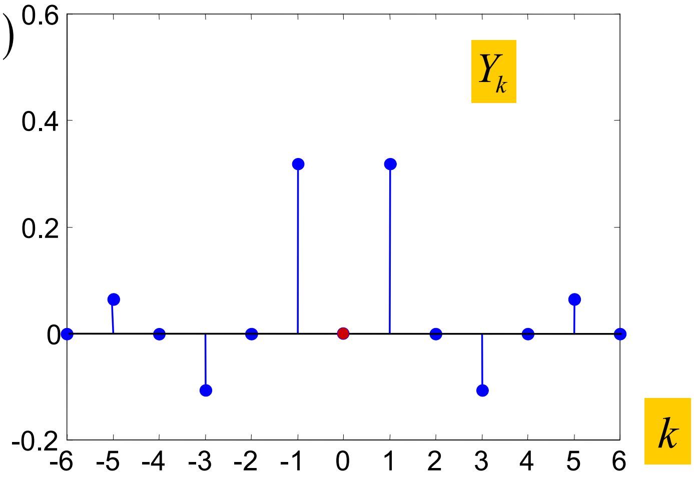
$$Y_k = \begin{cases} 1 & \text{per } k = 0 \\ 0 & \text{per } k \neq 0 \end{cases}$$



Esempi di espansione in serie di Fourier: l'onda quadra a media nulla



$$y(t) = \underbrace{y_0(t)}_{\substack{\text{onda quadra}\\ \text{precedente}}} - \frac{1}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi k}{2}\right)}{\frac{\pi k}{2}} \cdot \cos(2\pi k f_0 t)$$



La componente continua Y_0 vale 0

$$Y_k = \frac{1}{T_o} \int_{-T_o/4}^{T_o/4} \exp\{-j2\pi\ k\ f_o t\}\, dt =$$

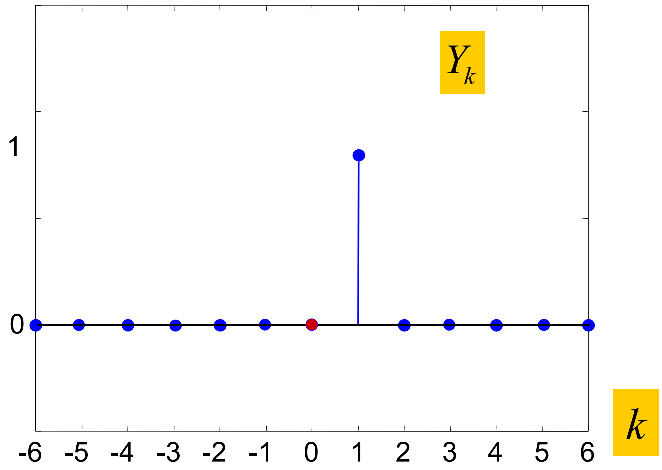
$$\frac{1}{T_o} \int_{-T_o/4}^{T_o/4} \cos\{2\pi\ k\ f_o t\}\, dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin \pi\ k/2}{\pi\ k/2} \quad \text{per } k \neq 0$$

Esempi di espansione in serie di Fourier: l'esponenziale complesso

L'esponenziale complesso è periodico, ed e' di per sé un termine dell'espansione in serie di Fourier:

$$y(t) = \exp\{\ j\ 2\pi\ f_o t\ \}$$

La componente continua vale 0



$$Y_k = \begin{cases} 1 & \text{per } k = 1 \\ 0 & \text{per } k \neq 1 \end{cases}$$

Esempi di espansione in serie di Fourier: il coseno

$$y(t) = \cos(2\pi f_o t)$$

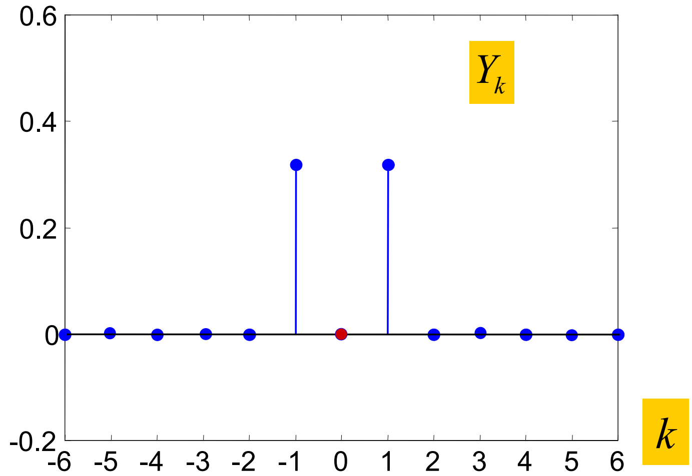
Il coseno e' di per sé un termine dell'espansione in serie di Fourier di segnali reali:

$$y(t) = Y_o + 2\sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(2\pi\ k\ f_o t + \vartheta_k)$$

$$Y_k = Y_{-k}^* = A_k \exp(j\vartheta_k)$$

La componente continua vale 0

$$Y_k = \begin{cases} 1/2 & \text{per } k = \pm 1 \\ 0 & \text{per } k \neq \pm 1 \end{cases}$$



Esempi di espansione in serie di Fourier: il seno

$$y(t) = \sin(2\pi f_o t)$$

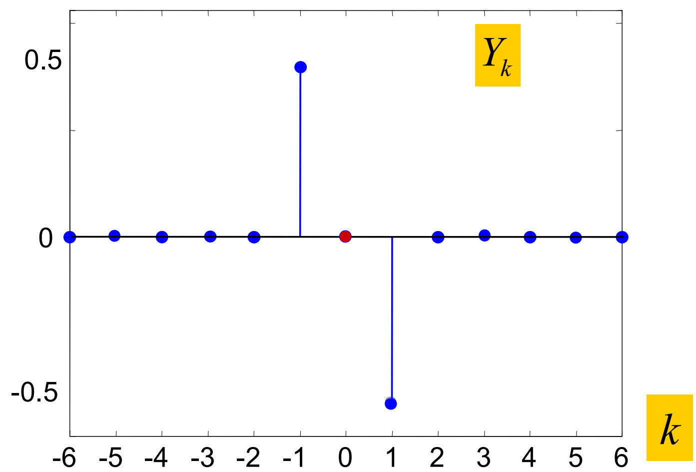
Il seno e' di per sé un termine dell'espansione in serie di Fourier di segnali reali:

$$y(t) = Y_o + 2\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(2\pi\ k\ f_o t) - b_k \sin(2\pi\ k\ f_o t)$$

$$Y_k = a_k + jb_k$$

La componente continua vale 0

$$Y_k = \begin{cases} -\frac{j}{2} & \text{per } k = +1 \\ +\frac{j}{2} & \text{per } k = -1 \\ 0 & \text{per } k \neq \pm 1 \end{cases}$$



Esempi di espansione in serie di Fourier: “treno regolare di impulsi ideali”

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a \cdot \delta(t - nT_0)$$

$$Y_k = \frac{1}{T_o} \int_{-T_o/2}^{T_o/2} y(t) \exp\{-j2\pi \ k \ f_o t\} \, dt = \frac{1}{T_o} \int_{-T_o/2}^{T_o/2} a \cdot \delta(t) \, dt = \frac{a}{T_o}$$

$$\boxed{Y_k = \frac{a}{T_0}}$$